Дополнительная общеобразовательная программа

«Решение задач с параметром и модулем»

**1.ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.**

**1.1.КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ**

Основной задачей модернизации российского образования является повышение его доступности, качества и эффективности. Это предполагает точный и правильный подход ко всему образовательному процессу, приведение его в соответствие с требованиями времени.

Задачи с параметром и модулем традиционно представляют для учащихся сложность в логическом ,техническом и психологическом плане. Однако именно решение таких задач открывает перед учащимися большое число эвристических приемов общего характера ,применяемых в исследованиях на любом математическом материале. Кроме того, задачи с параметром и модулем обладают высокой диагностической и прогностической ценностью. Мы считаем, что обучать массово школьников решению уравнений и неравенств с параметрами вряд ли целесообразно, решению таких задач надо обучать специально. Учащиеся образовательных учреждений традиционно знакомятся при изучении математики с графическими методами решения уравнений, неравенств и их систем. Однако, в последнее время содержащиеся в контрольно-измерительных материалах ГИА И ЕГЭ задания (так называемые комбинированные уравнения) решения которых требует применения только функционально – графического метода вызывает у учащихся затруднений.

Итак, актуальность данного курса определяет возникшие противоречия между 1) требованиями , предъявленными к знаниям и умениям по решению задач с параметрами и модулем и реальным уровнем их сформированности у учащихся образовательных учреждений; 2) необходимость усовершенствования обучения учащихся решению уравнений и неравенств с параметром и модулем и отсутствия научно-обоснованной методики обучения учащихся решению такого рода задач.

**1.2. МЕСТО КУРСА В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ**

Программа курса предназначена для учащихся 7-9 классов, рассчитана на 102 часа(32 часа в 7 классе, 34часа в 8 классе, 34 часа в 9 классе). Преподавание курса предусматривается в рамках оказания платных дополнительных услуг.

Предлагаемый курс построен по принципам модульного дополнения действующего учебника А.Г Мордковича, естественным образом примкнет к курсу, углубляя и расширяя его. Курс предназначен для учащихся , выбравших для себя те области деятельности ,в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира.

**1.3 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА**

**Цель курса**

-совершенствование математической культуры и творческих способностей учащихся на основе коррекции базовых математических знаний

-расширение возможностей учащихся в отношении дальнейшего профильного образования

**Задачи курса**:

-формирование у учащихся целостного представления о заданиях с параметрами и модулем, их значение в разделе математики и связь с другими задачами

- формирование поисково-исследовательского метода , аналитического мышления, развитие памяти, кругозора, умение преодолевать трудности при решении сложных задач

-осуществление работы с дополнительной литературой

-акцентирование внимания учащихся на единых требованиях к правилам оформления различных видов заданий , включаемых в итоговую аттестацию в форме ГИА.

-охарактеризовать методы решения заданий с параметрами, выделить их гносеологические и деятельностные компоненты

-исследовать методические аспекты применения компьютерных технологий для обучения учащихся приемам решения уравнений и неравенств с параметрами и модулем.

**1.4. ПРЕДПОЛАГАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

Изучение данного курса дает возможность учащимся:

- использовать базы данных, т.е. сведения которые уже имеются у решавшего задачу;

-освоить технологию, позволяющую структурировать решение задач с параметром и модулем;

- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;

- повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;

- познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов, в ходе подготовки к итоговой аттестации в форме ГИА и ЕГЭ.

**1.5.МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности. Основные формы проведения занятий: беседа, дискуссия, консультация, практическое занятие, защита проекта. Особое значение отводится самостоятельной работе учащихся , при которой учитель на разных этапах изучения темы выступает в разных ролях, четко контролируя и направляя работу учащихся.

Предполагаются следующие формы организации обучения: индивидуальная, групповая, коллективная, взаимное обучение, самообучение.

Средства обучения: дидактические материалы, творческие задания для самостоятельной работы, мультимедийные средства, справочная литература.

Технологии обучения: информационные, проектные, исследовательские. Занятия носят исследовательский характер. Предполагаются ответы на вопросы в процессе дискуссии, поиск информации по смежным областям знаний.

**1.6. КОНТРОЛЬ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ УЧАЩИМИСЯ ПРОГРАММЫ**

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля: самостоятельная работа, практикумы, тестирование.

Основные формы итогового контроля:

Практикумы по темам «Модели пространственных фигур. Позиционные построения» , «Метод ортогонального проектирования»,

« Координатно-векторный метод», «Вспомогательный параллелепипед», «Комбинации геометрических тел»; тестирование по теме «Итоговый контроль».

Показателем эффективности следует считать повышенный интерес к математике, творческую активность учащихся.

**2.СОДЕРЖАНИЕ И ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ**

**1.Начальные представления о модуле ( 1 час)**

Модуль действительного числа. Геометрическая интерпретация.

**2.Способы решения заданий с модулем (3 часа)**

Методы решения уравнений вида: *|ах+в|=с*, где *с* - любое действительное число, *|ах+в|=|сх+д|.*

Графическое решение неравенства *|ах+в|≤с*, где *с* – любое действительное число. Методы решения уравнений вида: *|ах+в|+|сх+д|=т*, *|ах+в|+|сх+д|+пх=т*. Методы решения неравенств вида: *|ах+в|+|сх+д|<т,|ах+в|+|* *сх+д|+ пх>т*. Методы решения неравенств вида*: |ах+в|≤| сх+д|, |ах+в|≥| сх+д*|, *|ах+в|≤ сх+д, |ах+в|≥ сх+д*. Метод замены переменной решения уравнений.

**3. Задачи с модулем ( 18 часов)**

Линейное уравнение, содержащее абсолютную величину. Преобразование выражений, содержащих модуль. Решение уравнений и неравенств вида *|х|= а, |ах+в|=0, |ах+в|≤0.* Графики функций, содержащих модули. Построение графиков функций вида *у=|f(х)|, у=| ах+в|, y= f|x|, |y| =f(x) b |y|=|f(x).* Построение графиков функций, связанных с модулем.Квадратное уравнение и квадратное неравенство, содержащее абсолютную величину. Дробно- линейные уравнения, содержащие абсолютную величину .

Методы решения дробно-линейных уравнений с модулем

**4.Начальные представления о параметре(2часа)**

Понятие параметра. Примеры уравнений и неравенств с параметром. Понятие об уравнении с параметром. Что значит решить уравнение с параметром.

**5.Способы решения задач с параметрами (16 часов)**

Аналитический способ, графический, функциональный и функционально- графический. Сочетание графического и аналитического методов. Способ определения множества значений функции. Способ определения условий существования корней уравнения y=f(x;а) относительно х (считая переменные у и а параметрами этого уравнения) при сформированных требованиях к переменной у. Решение относительно параметра а равенства y=f(x;а).

**6. Задачи с параметрами ( 27 часов)**

Линейные уравнения и неравенства с параметром. Приемы построения графиков линейных функций с параметром. Решение систем линейных уравнений с параметром. Квадратные уравнения и неравенства с параметром. Соотношение между корнями квадратных уравнений. Исследование квадратного трехчлена. Количество корней квадратного уравнения в зависимости от параметра. Задачи с параметром ,решаемые с помощью теоремы Виета. Системы квадратных уравнений и неравенств. Уравнения с параметром, приводимые к квадратным. Методы решения дробных уравнений с параметром в общем виде.

**7.Задачи условного параметрического анализа (5 часов)**

Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданного множества чисел. 6 типов расположения корней квадратного трехчлена. Метод интегрального анализа.

**8.Полный параметрический анализ соотношений с модулем (3 часа)**

Алгоритм метода интегрального анализа. Условные схемы. Основное назначение условных схем заключается в освобождении соотношения от функции модуля путем перехода к равносильному множеству соотношений.

**9.Полный параметрический анализ рациональных соотношений( 3 часа)**

5 схем «освобождения» от дроби. Несмотря на относительную громоздкость, логическая простота этих схем часто позволяет справиться с возникающими осложнениями.

**10. Несколько решений одной задачи ( 8 часов)**

Решение первое- метод интервалов;

решение второе- графическое в плоскости (х;а);

решение третье-метод нестандартных преобразований неравенств с модулем;

решение четвертое- графическое в плоскости (х;у);

решение пятое- относительно параметра.

Решения первое и третье являются аналитическими и обусловлены спецификой именно этой задачи и ей подобных. Учащийся после ознакомления со всеми решениями не должен устанавливать между методами какой-либо иерархии по эффективности их применения, поскольку, как известно, эффективность избранного пути решения зависит от постановки задачи.

**3.УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | | Наименование разделов | Всего  часов | В том числе | | Форма  контроля |
| Теорет. | Практ. |
| **7 класс** | | | | | | |
| **1.Начальные представления о модуле. ( 1 час)** | | | | | | |
| **2.Способы решений заданий с модулем . ( 3 часа)** | | | | | | |
| 2.1 | Аналитический способ | | 1 | 0,5 | 0.5 |  |
| 2.2 | Функциональный и функционально-графический способ | | 1 | 0,5 | 0,5 |  |
| 2.3 | Сочетание графического и аналитического методов решения уравнений | | 1 | 0,5 | 0,5 | Практикум |
| **3.Задачи с модулем. (10 часов)** | | | | | | |
| 3.1 | Свойства модуля. Модуль, как расстояние | | 1 | 0,5 | 0,5 |  |
| 3.2 | Линейные уравнения с модулем | | 3 | 1 | 2 | Самостоятельная работа |
| 3.3 | Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля | | 3 | 1 | 2 |  |
| 3.4 | Приемы построения графиков линейных функций, содержащих переменную под знаком модуля | | 3 | 1 | 2 | Практикум |
| **4. Начальные представления о параметре. ( 1 час)** | | | | | | |
| **5. Способы решения задач с параметрами. ( 3 часа)** | | | | | | |
| 5.1 | Аналитический способ | | 1 | 0, 5 | 0, 5 |  |
| 5.2 | Функциональный и функционально-графический способ | | 1 | 0, 5 | 0, 5 |  |
| 5.3 | Сочетание графического и аналитического методов решения уравнений | | 1 | 0,5 | 0,5 | Практикум |
| **6. Задачи с параметром.(9 часов)** | | | | | | |
| 6.1 | Линейных уравнения с параметром | | 3 | 1 | 2 |  |
| 6.2 | Линейные неравенства с параметром | | 3 | 1 | 2 | Тестирование |
| 6.3 | Приемы построения графиков линейных функций с параметром | | 3 | 1 | 2 | Практикум |
| **7. Комбинированные задачи с модулем и параметром.( 2 часа)** | | | | | | |
| **8. Конструирование задач с параметром.( 2 часа)** | | | | | | |
| **9. Заключительное занятие. Решение уравнений, неравенств, содержащих модуль. Построение графиков функций на компьютере.**  **( 1час)** | | | | | | |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | | Наименование разделов | Всего  часов | В том числе | | Форма  контроля |
| Теорет. | Практ. |
| **8 класс** | | | | | | |
| **1.Начальные представления о параметре. ( 1 час)** | | | | | | |
| **2.Способы решений заданий с параметром. ( 3 часа)** | | | | | | |
| 2.1 | Аналитический способ | | 1 | 0,5 | 0.5 |  |
| 2.2 | Функциональный и функционально-графический способ | | 1 | 0,5 | 0,5 |  |
| 2.3 | Сочетание графического и аналитического методов решения уравнений | | 1 | 0,5 | 0,5 | Практикум |
|  | **3.Задачи с параметром. (18 часов)** | |  |  |  |  |
| 3.1 | Решение систем линейных уравнений с параметром | | 2 | 0,5 | 1,5 |  |
| 3.2 | Квадратные уравнения с параметром | | 2 | 1 | 1 | Самостоятельная работа |
| 3.3 | Соотношения между корнями квадратных уравнений | | 1 | 0,5 | 0,5 |  |
| 3.4 | Квадратные неравенства с параметром | | 2 | 1 | 1 |  |
| 3.5 | Исследование квадратного трехчлена | | 1 | 0, 5 | 0, 5 |  |
| 3.6 | Количество корней квадратного уравнения в зависимости от значений параметров | | 1 | 0, 5 | 0, 5 |  |
| 3.7 | Задачи с параметром, решаемые с помощью теоремы Виета | | 1 | 0,5 | 0,5 | Практикум |
| 3.8 | Системы квадратных уравнений | | 3 | 1 | 2 |  |
| 3.9 | Системы квадратных неравенств | | 2 | 1 | 1 | Практикум |
| 3.10 | Уравнения с параметром, приводимые к квадратным | | 1 | 0,5 | 0,5 |  |
| 3.11 | Методы решения дробных уравнений с параметром в общем виде | | 2 | 1 | 1 |  |
| **4.Задачи, содержащие абсолютную величину(8 часов)** | | | | | | |
| 4.1 | Квадратные уравнения , содержащие абсолютную величину | | 1 | 0,5 | 0,5 |  |
| 4.2 | Методы решения квадратных уравнений с модулем | | 2 | 1 | 1 | Практикум |
| 4.3 | Квадратные неравенства с модулем. Графическая интерпретация | | 2 | 1 | 1 |  |
| 4.4 | Дробно линейные уравнения, содержащие абсолютную величину | | 2 | 1 | 1 |  |
| 4.5 | Методы решения дробно-линейных уравнений с модулем | | 1 | 0,5 | 0,5 | Самостоятельная работа |
| **5. Конструирование задач с параметром и модулем.( 3 часа)** | | | | | | |
| **6. Заключительное занятие. Решение уравнений, неравенств, содержащих модуль. Построение графиков функций на компьютере. (1 час)** | | | | | | |
|  |  | |  |  |  |  |
|  |  | |  |  |  |  |
|  |  | |  |  |  |  |

**Учебно-тематический план курса**

**9 класс**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Темы | Учебное время, ч | | | |  |
| Теория | Практика | Проект | Всего | Форма контроля |
| **1.** | **Задачи условного параметрического анализа** | **0,5** | **1,5** |  | **2** |  |
| 1.1 | Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданного множества чисел. |  |  |  |  |  |
| **2.** | **Полный параметрический анализ соотношений с модулем** | 1 | 2 |  | 3 |  |
| **3.** | **Условный параметрический анализ** |  |  |  |  |  |
| 3.1 | Метод интервального анализа. | **1** | **2** |  | 3 | Практикум |
| **4.** | **Полный параметрический анализ рациональных соотношений** | **1** | **2** |  | **3** |  |
| **5.** | **Графические методы решения задач с параметром** | **2** | **6** | 2 | 10 |  |
| 5.1 | Вспомогательные области. Метод областей. | 1 | 2 |  |  | Практикум |
| 5.2 | Графическая интерпретация основных задач с параметром. | **1** | 4 | **2** |  |  |
| **6.** | **Несколько решений одной задачи** |  | 6 | **2** | **8** |  |
| 6.1 | Метод интервалов |  | 1 | **0,5** |  |  |
| 6.2 | Графическое решение |  | **1** | **0,5** |  | **Самостоятельная**  **работа** |
| 6.3 | Метод нестандартных преобразований с модулем |  | **2** | **0,5** |  |  |
| 6.4 | Решение относительно параметра |  | **2** | **0,5** |  |  |
| **7.** | **Применение компьютерных технологий** | **2** | **2** | **1** | **5** | **Тестирование** |
|  | **Итого:** | **7,5** | **21,5** | **5** | **34** |  |

**9. Литература**

1. Геометрия, 10-11: учеб. Для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. Уровни / Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутусов, С.Б.Кадомцев и др.-М.: Просвещение,2008.- 255с.

2. Дидактические материалы по геометрии.10-11 класс / Б.Г.Зив - М.: Просвещение,2010.

3. ЕГЭ. Математика. Задания типа С / И.Н.Сергеев.- 3-е изд., перераб. и доп.-

М.: Издательство «Экзамен», 2010.-334с.

4.Геометрия . Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9.Учимся решать задачи: учебное пособие/ Б.И.Вольфсон, Л.И.Резницкий.- Ростов н/Д: Легион-М,2012.224 с.

5. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ./ В.С.Парфенов, И.Н.Сергеев- 2-е изд., доп. и расшир.- М.: Интеллект-Центр,2012.-96с.

6. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. ЕГЭ 2012.Математика.Учебноепособие./А.В.Семенов,А.С.Трепалин,И.В.Ященко,П.И.Захаров; под ред. И.В.Ященко; Московский центр непрерывного математического образования.-М.:Интеллект-Центр,2012.-112с.

7. ЕГЭ 2013.Математика. Типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов. Под ред.Семенова А.Л., Ященко И.В. Серия «ЕГЭ-2013. ФИПИ-школе».

М.: Национальное образование,2012.-154с.

**10.Интернет-источники**

Открытый банк задач ЕГЭ: http//mathege.ru

ЕГЭ 2013.Математика.Решение заданий типа С2.Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: типы задач и методы их решения.

<http://down.ctege.info/ege/2013/book/matem/matem2013reshenieC2koryanov.zip>

**Содержание: (для 7 класса)**

|  |  |
| --- | --- |
| Введение…………………………….…………………………………….. | 3 |
| Понятие модуля действительного числа………………………………… | 3 |
| Формула расстояния между двумя точками на координатной прямой... | 4 |
| Уравнения с модулем……………………………………………………... | 5 |
| Неравенства с модулем…………………………………………………… | 7 |
| Построение графиков функций, содержащих знак модуля……………. | 9 |
| Список литературы……………………………………………………….. | 14 |
| Список использованных компьютерных программ…………………….. | 14 |

**§ 1. Введение**

В школьном курсе математики во всех классах, начиная с шестого, имеется возможность рассматривать упражнения, содержащие знак абсолютной величины. В данную работу включен материал, рассчитанный для рассмотрения в седьмом классе на уроках или факультативных занятиях.

Слово «модуль» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «мера». Это многозначное слово (омоним), которое имеет множество значений и применяется не только в математике, но и в архитектуре, физике, технике, программировании и других точных науках.

В архитектуре - это исходная единица измерения, устанавливаемая для данного архитектурного сооружения и служащая для выражения кратных соотношений его составных элементов.

В технике - это термин, применяемый в различных областях техники, не имеющий универсального значения и служащий для обозначения различных коэффициентов и величин, например модуль зацепления, модуль упругости и т.п.

Модуль объемного сжатия (в физике) - отношение нормального напряжения в материале к относительному удлинению.

**§ 2. Понятие модуля действительного числа**

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется само это число, если а ≥ 0, и противоположное число -а, если а < 0. Модуль числа a обозначается |a|. Итак,















.

0

если

,

,

0

если

,

*a*

*a*

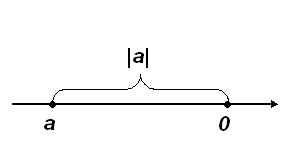
*a*

*a*

*a*

Геометрически |a| означает расстояние на координатной прямой от точки a до точки О (рис. 1)

Рис. 1



Свойства модулей:

1.|a| ≥ 0

2.|a| = | −a|

3.|ab| = |a| · |b|

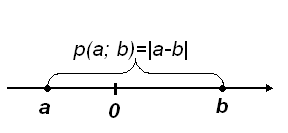
4.

5. |a|² = a²

**§ 3. Формула расстояния между двумя точками на координатной прямой.**

Если a и b - две точки на координатной прямой, то расстояние между ними p(a; b) выражается формулой **p(a; b)=|a** − **b|** (рис. 2). Ясно, что p(a; b)= p(b; a). Так, p (− 2; 5) = |− 7|= − (− 7) = 7.

Рис. 2

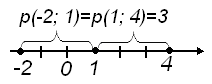


**Пример 3.1.** Найти все такие точки x, которые удовлетворяют:

а) уравнению |x − 1| = 3; б) неравенству |x + 1| ≤ 2.

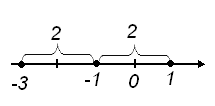
Решение.а) Уравнению удовлетворяют такие точки x, расстояние которых от точки 1 равно 3. Это точки − 2 и 4 (рис. 3). Значит, уравнение имеет два корня: − 2 и 4.

Рис. 3



б) Неравенству удовлетворяют такие точки x, которые удалены от точки −1 на расстояние, меньшее или равное 2. Это точки из отрезка [− 3; 1] (рис.4).

Рис. 4



**§ 4. Уравнения с модулем**

Чтобы решить уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, надо освободиться от знака модуля, используя его определение:















.

0

если

,

,

0

если

,

*a*

*a*

*a*

*a*

*a*

На практике это делается так:

1) находятся критические точки, т. е. значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

2) разбивают область допустимых значений переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

3) на каждом из найденных промежутков решают уравнение без знака модуля.

Совокупность (объединение) решений указанных промежутков и составляем все решения рассматриваемого уравнения.

Покажем это на конкретных примерах:

**Пример 4.1.** Решить уравнение |x + 3| = 2x − 1.

Решение. Критическая точка находится после решения уравнения

x + 3 = 0, x = − 3.

1) При x < − 3 получаем уравнение – x – 3 = 2x – 1, откуда x = − .

Но найденное значение не входит в рассматриваемый промежуток.

2) При x ≥ 3 получаем уравнение x + 3 = 2x – 1, откуда x = 4. Найденное значение входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ. 4.

**Пример 4.2.** Решить уравнение |x + 2| + |x + 3| = x.

Решение. Найдем критические точки:

x + 2 = 0 или x + 3 = 0;

x = − 2 или x = −3.

Решаем задачу на каждом промежутке:

1) x < − 3, − x − 2 – x − 3 = x, − 3x = 5; x = −  (не входит в рассматриваемый промежуток).

2) − 3 ≤ x < − 2, − x − 2 + x + 3 = x; x = 1 (не входит в рассматриваемый промежуток).

3) x ≥ − 2, x + 2 + x + 3 = x; x = − 5 (не входит в рассматриваемый промежуток).

Ответ. .

**Пример 4.3.** Решить уравнение |x + 5| − |x – 3| = 8.

Решение. Найдем критические точки:

x + 5 = 0 или x – 3 = 0;

x = − 5 или x = 3.

Решаем задачу на каждом промежутке:

1) x < − 5, − x – 5 – (− x + 3) = 8, − x − 5 + x − 3 = 8; − 8 = 8 ложно. На рассматриваемом промежутке решений нет.

2) − 5 ≤ x < 3, x + 5 − (− x + 3) = 8, x + 5 + x − 3 = 8, 2x = 6; x = 3 (не входит в рассматриваемый промежуток).

3) x ≥ 3, x + 5 − (x − 3) = 8, x + 5 − x + 3 = 8; 8 = 8 верно. Уравнение выполняется при всех x из рассматриваемого промежутка.

Ответ. [3; + ∞].

**§ 5. Неравенства с модулем**

Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, находится аналогично решению уравнений подобного рода (см. «Уравнения с модулем»).

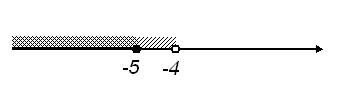
Рассмотрим это на конкретных примерах.

**Пример 5.1.** Решить неравенство |x + 4| ≥ 1.

Решение. Критическая точка находится решением уравнения x + 4 = 0, откуда x = − 4.

1) Рассмотрим промежуток x < − 4. На нем исходное неравенство принимает вид − x − 4 ≥ 1. Решая это неравенство, найдем x ≤ − 5 (рис. 5). Так как x < − 4 и x ≤ − 5, то решением исходного неравенства будет промежуток x ≤ − 5.

Рис. 5



2) Рассмотрим промежуток x > − 4. На нем исходное неравенство принимает вид x + 4 ≥ 1, откуда x ≥ − 3.

Так как x > − 4 и x ≥ − 3, то решением исходного неравенства будет промежуток x ≥ − 3 (рис. 6).

Рис. 6



3) Учитывая случаи 1) и 2), окончательно имеем x ≤ − 5 и x ≥ − 3 (рис.7).

Рис. 7



Ответ. x ≤ − 5 и x ≥ − 3.

**Пример 5.2.** Решить неравенство |x − 3| < 1.

Решение. Найдем критическую точку x − 3 = 0, т. е. x = 3.

1) Рассмотрим промежуток x < 3. В этом случае имеем



откуда











x + 3 < 1,

x < 3,









x > 2.

x < 3,

Следовательно, решением исходного неравенства является промежуток (2; 3) (рис. 8).

Рис. 8



Рассмотрим промежуток x ≥ 3. В этом случае имеем

или









x − 3 < 1,

x ≥ 3,









x < 4.

x ≥ 3,

Следовательно, решением исходного неравенства является промежуток (3; 4) (рис. 9).

Рис. 9



3) Рассмотрим вместе эти промежутки. Решением неравенства будет промежуток (2; 4).

Ответ.2 < x < 4.

**§ 6. Построение графиков функций, содержащих знак модуля**

Рассмотрим задачи на построение графиков некоторых функций, содержащих знак модуля. Это графики трех видов:

y = f (|x|), y = |f (x)| и |y| = f (x).

**Пример 6.1.** Так, для построения графика функции y = |x| на основании определения модуля имеем:











x, если < 0.

x, если x ≥ 0,

y = |x| =

Следовательно, график функции y = |x| состоит из двух графиков: графика y = x в правой полуплоскости и графика y = x в левой полуплоскости (рис. 10).

y

Рис. 10



x

**Пример 6.2.** Пусть требуется построить график функции a) y = |x| + 2.

На основании определения модуля имеем:











x + 2, если x < 2.

x + 2, если x ≥ 2,

y = |x| + 2 =

Следовательно, график функции y = |x| + 2 имеет следующий вид (рис. 11):



Рис. 11

x

y

б) y = |x| − 2.

На основании определения модуля имеем:











x − 2, если x < 2.

x − 2, если x ≥ 2,

y = |x| − 2 =

Следовательно, график функции y = |x| − 2 имеет следующий вид (рис. 12):

Рис. 12

y



x

**Пример 6.3.** Пусть требуется построить график функции a) y = |x + 3|.

На основании определения модуля имеем:











x − 3, если x < 3.

x + 3, если x ≥ 3,

y = |x + 3| =

Следовательно, график функции y = |x + 3| имеет следующий вид (рис. 13):

Рис. 13

y



x

б) y = |x − 3|.

На основании определения модуля имеем:











x + 3, если x < 3.

x − 3, если x ≥ 3,

y = |x − 3| =

Следовательно, график функции y = |x − 3| имеет следующий вид (рис. 14):

y



Рис. 14

x

**Пример 6.4.** Пусть требуется построить график зависимости |y| = x.

Учитывая, что в формуле |y| = x, x ≥ 0 и на основании определения модуля











y, если y < 0,

y, если y ≥ 0,

|y| =

перепишем формулу |y| = x в виде

y = ± x, где x ≥ 0.

Следовательно, график зависимости |y| = x состоит из графиков двух функций y = x и y = − x, где x ≥ 0 (рис. 15):

y

Рис. 15



x

**Пример 6.5.** Пусть требуется построить график зависимости |y| + |x| = 4. Из данного равенства видно, что |x| ≤ 4 и y ≤ 4. На основании определения модуля имеем:

а) при x ≥ 0 и y ≥ 0 x + y = 4, или y = − x + 4;

б) при x ≥ 0 и y < 0 x − y = 4, или y = x − 4;

в) при x < 0 и y ≥ 0 − x + y = 4, или y = x + 4;

г) при x < 0 и y < 0 − x − y = 4, или y = − x − 4.

График данной зависимости симметричен относительно осей координат и представляет собой стороны квадрата (рис. 16).



x

y

Рис. 16

**Список литературы**

1. Гайдуков И. И. Абсолютная величина. М., « Просвещение», 1968.

2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: справочные материалы. М., « Просвещение», 1988.

3. Дронов А. М. и др. Графики функций. М., «Высшая школа», 1972.

4. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов. М., « Просвещение», 1991.

5. Симонов А. Я. и др. Система тренировочных задач и упражнения по математике. М., « Просвещение», 1991.

**Список использованных компьютерных программ**

1. Текстовой редактор Microsoft Office XP: Word.
2. Графический редактор Microsoft Office XP: Paint.
3. Графический пакет Grapher Version 7.0.

Оглавление

Введение 3

Глава 1 Основные понятия 5

§1Что такое параметр5

§2 Что означает «решить задачу с параметром» 6

§3 Основные типы решения задач с параметрами 6

§4Основные способы решения задач с параметрами7

Глава 2 Основные способы решения задач с параметрами 8

§1 Аналитический способ 8

§2 Графический способ 12

§3 Решение относительно параметра 15

Заключение 22

Литература 23

Приложение 1 Результаты социологического опроса в 9, 11 классах 24

Приложение 2 Список задач с параметром 25

# 

# Введение.

Задачи с параметром - одна из самых интересных и многогранных тем в математике. Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, но их решение вызывает у них значительные затруднения. Это связано с тем, что каждое уравнение с параметрами представляет собой целый класс обычных уравнений, для каждого из которых должно быть получено решение.

Актуальность данной темы очевидна. Ведь уравнения и неравенства с параметром стали привычной частью вступительных экзаменов ЕГЭ (задание № 18), на ГИА (задание № 23) и на вступительных экзаменах в вузы. И хотя они нередко представлены в многочисленных пособиях для абитуриентов, в школьной практике такие задачи встречаются редко.

Осенью 2015 года мы провели социологический опрос. Решили выяснить, будут ли выпускники 2016 года решать на ГИА и ЕГЭ по математике задания с параметром (см.приложение 1). Результаты нашего исследования неутешительные. Из 80 респондентов 50 (т.е. 63%) сообщили, что не будут решать задания такого типа. Учащиеся выпускных классов не до конца понимают, что каждое невыполненное задание на экзамене лишает их возможности получить высокие баллы и быть конкурентно способными на вступительных экзаменах в ВУЗы. В связи с этим мы и решили изучить задания последних лет с параметрами на ЕГЭ по математике.

Цель данной работы: изучение основных способов решения уравнений и неравенств с параметром.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) сбор и обработка материала по данной теме;

2) систематизировать различные методы решения;

3) провести мастер-классы по решению уравнений с параметром в 11 классах;

4) разработать список заданий по данной теме ( в помощь учителю и ученику).

Объект исследования: уравнения и неравенства с параметром.

Предмет исследования: методы решения уравнений и неравенств, содержащих параметр.

Методы исследования:

* Изучение специальной литературы по данному вопросу: энциклопедии, справочники и учебные пособия, Интернет-ресурсы
* Анкетирование
* Проведение мастер класса
* Обработка полученных данных(составление обобщающих таблиц, диаграмм,)
* Работа в компьютерных программах MicrosoftWord, Excel, MicrosoftPowerPoint

Глава 1 Основные понятия.

§1 Что такое параметр.

Толковый словарь определяет параметр как величину, характеризующую какое - нибудь основное свойство машины, устройства, системы или явления, процесса. (Ожегов С.И. , Шведова Н.Ю. Толковый словарь русского языка.Москва. 1999). Рассмотрение параметров - это всегда выбор. Покупая какую-то вещь, мы внимательно изучаем ее основные характеристики. Так, приобретая компьютер, мы обращаем внимание на следующие его параметры: производительность, габариты, состав комплектующих, цену и др. Перед выбором мы стоим и в различных жизненных ситуациях. Вспомним сказку: В чистом поле стоит столб, а на столбу написаны слова: «Кто поедет от столба сего прямо, тот будет голоден и холоден; кто поедет в правую сторону, тот будет здрав и жив, а конь его будет мертв; а кто поедет в левую сторону, тот сам будет убит, а конь его жив и здрав останется!» Иван-царевич прочел эту надпись и поехал в правую сторону, держа на уме: хоть конь его и убит будет, зато сам жив останется и со временем сможет достать себе другого коня. (“Иван-царевич и серый волк” Русская народная сказка). Здесь от выбора зависит жизнь Ивана-царевича.

Что такое параметр в математике?Если вы вспомните некоторые основные уравнения (например, kx+l=0, ax²+bx+c=0), то обратите внимание, что при поиске их корней значения остальных переменных, входящих в уравнения, считаются фиксированными и заданными. Все разночтения в существующей литературе связаны с толкованием того, какими фиксированными и заданными могут быть эти значения остальных переменных.

Поскольку в школьных учебниках нет определения параметра, возьмем за основу следующий его простейший вариант.

Определение: параметром называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения |x|=a–1 не следует неотрицательность значений выражения a–1, и если a–1<0, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

§2 Что означает «решить задачу с параметром».

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т. д. удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

§3. Основные типы задач с параметрами.

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

При решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и т. д., ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени.

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратны задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Многообразие задач с параметром охватывает весь курс школьной математики (и алгебры, и геометрии), но подавляющая часть из них на выпускных и вступительных экзаменах относится к одному из четырех перечисленных типов, которые по этой причине названы основными.

§4 Основные способы решения задач с параметром.

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; a).

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Перейдем теперь к демонстрации указанных способов решения задач с параметром.

Глава 2. Основные способы решения задач с параметром

§1 Аналитический способ.

Универсальных методов решения уравнений и неравенств с параметрами не существует. Одно из немногих исключений – линейные уравнения и неравенства.

Пример 1. Решить уравнение *а*(*а* – 2)*х* = *а* – 2.

*Решение.*Перед нами линейное уравнение, имеющее смысл при всех допустимых значениях *а*. Будем его решать «как обычно»: делим оби части уравнения на коэффициент при неизвестном. Но всегда ли возможно деление? Нет. Делить на ноль нельзя. Придется рассмотреть отдельно случай, когда коэффициент при неизвестном равен нулю. Получим:

1).*а*= 2, тогда уравнение примет вид 0 ∙ *х* = 0, *х* – любое число;

2).*а* = 0, тогда 0 ∙ *х* = -2, уравнение корней не имеет;

3).*а* ≠ 0, *а* ≠ 2, тогда

*а*(*а* – 2)*х* = *а* – 2 ,

*х* = ,

*х* = .

*Ответ:* 1) если*а* ≠ 0, *а* ≠ 2, то *х* = .

2) если *а* = 2, то *х* – любое число;

3) если *а* = 0, то корней нет.

Отмечу сразу, что запись ответа – важнейший этап решения, отличающий задачу с параметром от других задач. Ответ в задаче с параметром – это описание *множества ответов* к задачам, полученным при конкретных значениях параметра.

Пример 2**.** Решить неравенство (*а* + 3)*х*< 4*а* – 1.

*Решение.* Рассмотрим случаи:

1) *а* + 3 = 0, *а* = -3, тогда неравенство примет вид 0 ∙ *х*< -13, неравенство решений не имеет;

2) *а* + 3 > 0, *а*> -3, тогда 

3) *а* + 3 < 0, *а*< -3, тогда 

*Ответ:* 1) если *а* = -3, то решений нет;

2) если *а*> -3, то 

3) если *а*< -3, то 

Другое важное исключение - уравнения и неравенства, связанные с квадратичной функцией.

Пример 3. Решить неравенство *ах*2< 4.

*Решение.* Здесь три случая:

1).если *а* = 0, то получаем неравенство 0 ∙ *х*2< 4, решением которого является любое число;

2).если *а*< 0, тогда *ах*2< 4 для всех *х*, поскольку *ах*2 ≤ 0;

3).если *а*> 0, тогда *х*2<, откуда < 0, или иначе:

< 0; пользуясь методом интервалов, заключаем, что

<*х*<.

*Ответ:* 1) если*а* ≤ 0, то *х* – любое число;

2) если*а*> 0, то *х*; .

Пример 4. Решить неравенство (*х* – 4*а*)(*х* + *а* – 5) ≤ 0.

*Решение.* Решим неравенство методом интервалов. Для этого необходимо оставить на числовой оси два числа: 4*а* и 5 – *а*. Но в каком порядке? Рассмотрим случаи:

* 1. 4*а* = 5 – *а*, что возможно при*а* = 1; неравенство примет вид:

(*х* – 4)2**≤** 0*****х* = 4;

2) 4*а*> 5 – *а*, что возможно при*а*> 1; число 4*а* на координатной оси расположено правее числа 5 – *а*.



*х* [5 – *a*; 4*a*]

3) 4*а*< 5 – а, что возможно при *а*< 1



*х* [4*a*; 5 – *a*]

*Ответ:* 1) если *а* = 1, то *х* = 4;

2) если *а*> 1, то *х* [5 – *a*; 4*a*];

3) если *а*< 1, то *х*  [4*a*; 5 – *a*].

Пример 5. Решить уравнение (*а* – 2)*х*2 + (2*а* – 3)*х* + *а* + 2 = 0.

*Решение.* Рассмотрим два случая:

1. *а* = 2, получим линейное уравнение *х* + 4 = 0, откуда *х* = -4;
2. *а* ≠ 2, получим квадратное уравнение. Рассмотрим дискриминант:

*D* = (2*а* – 3)2 – 4(*а* – 2)(*а* + 2) = 4*а*2 – 12*а* + 9 – 4*а*2 – 8*а* + 8*а* + 16 =

= -12*а* + 25

Далее, если *D*< 0, -12*а* + 25< 0, *а*>, тогда уравнение не имеет корней;

если же *D* ≥ 0, *а* ≤ , то .

*Ответ:* 1) если*а* = 2, то *х* = -4;

2) если *а*>, то корней нет;

3) если *а* ≤ , то .

При решении задач с параметрами нередко применяются те же самые приемы, что и при решении обычных задач. Так, в следующем примере мы используем разложение на множители.

Пример 6. Решить неравенство *х* + 9*а* ≥ 10**.**

*Решение.* Перепишем неравенство в виде: *х* + 9*а* - 10 ≥ 0. Рассмотрим случаи:

1. *а* = 0, тогда *х* ≥ 0;
2. *а*>0, тогда ОДЗ: *х* ≥ 0



Замена: 

*t*2 - 







Учитывая, что *х* ≥ 0, имеем





****

1. *а*< 0, тогда *х* ≤ 0 и *х* + 9*а* - 10< 0, что противоречит условию.

*Ответ:* 1) если*а* = 0, то *х*[0; + );

2) если *a*> 0, то ;

3) если*а*< 0, то решений нет.

При решении примера 7 мы воспользовались преобразованиями модуля.

Пример 7.Решить уравнение *x*|*x* – 4| = *a*.

*Решение.* Воспользуемся равносильностью:

****

1. Пусть а > 0, тогда х > 0. Перепишем уравнение в виде:



Так как *х*> 0 и *а*> 0, то корень первого уравнения *х* = 2 – , посторонний. Корни второго уравнения определены и положительны при

0<*а* ≤ 4.

2) Пусть*а*< 0, тогда *х*< 0. Перепишем уравнение в виде:



3) Пусть*а* = 0, тогда *х* = 0 или *х* = 4.

*Ответ:* 1) если*а* = 0, то *х* = 0 и *х* = 4;

2) если 0<*а* ≤ 4, то *х* = 2 +  и *х* = 2 ± ;

3) если*а*> 4, то *х* = 2 + ;

4) если*а*< 0, то *х* = 2 – .

Пример 8: Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение   имеет хотя бы один корень. (С5 ЕГЭ 2012г.)



Рассмотрим функции и



Функция



1.Пусть , тогда (раскрываем модуль со знаком минус) , . Получаем, что угловой коэффициент функции равен 4 либо 12, (так как может быть одинаковый знак в зависимости от числа х.) При таких значениях график функции возрастает (так как коэффициент больше 0)



2.Пусть , тогда , Получаем, что угловой коэффициент функции равен -4 либо -12. При таких значениях график функции убывает (так как коэффициент меньше 0)



3.При х=0, тогда Получаем, что = Функция возрастает при и убывает при , поэтому =



Исходное уравнение имеет один корень, когда



откуда , либо , где а=-5.



Ответ: -5,

§2 Графический способ.

Алгоритм графического решения уравнений с параметром:

-Находим область определения уравнения.

-Выражаем α как функцию от х.

-В системе координат строим график функции α (х) для тех значений х, которые входят в область определения данного уравнения.

-Находим точки пересечения прямой α =с, с графиком функции α (х). Если прямая α =с пересекает график α(х), то определяем абсциссы точек пересечения. Для этого достаточно решить уравнение

c = α(х) относительно х.

-Записываем ответ.

Рассмотрим на примерах:

Пример1: Решить уравнение |*x*2 - 2*x* - 3| = *a* в зависимости от параметра *а***.**

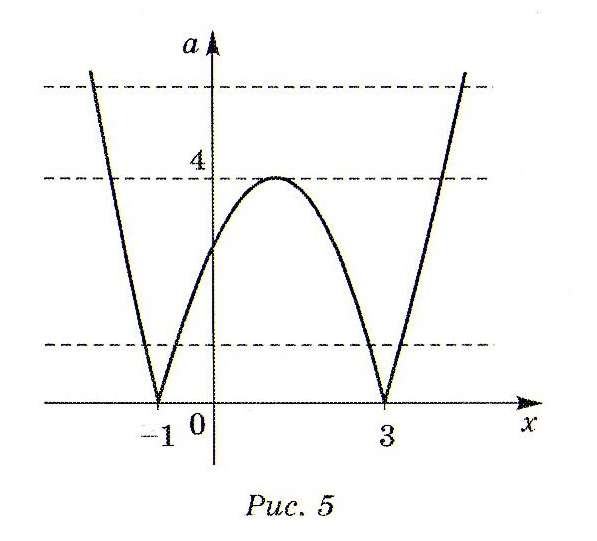
*Решение.* Понятно, что при *а* ≥ 0:





Но все ли корни подходят? Чтобы выяснить это, построим график функции*а* = |*x*2 - 2*x* - 3|. Количество корней можно увидеть на рисунке 1, мысленно проводя прямые линии, соответствующие значениям *а*. Получим:

1. если *a*< 0, то корней нет;
2. если*а* = 0 и *а*> 4, то два корня.



Найдем эти корни:

При *а* = 0 получим *x*2 - 2*x* - 3 = 0, и *х*1 = -1, *х*2 = 3; при *а*> 4 это корни уравнения *x*2 - 2*x* – 3 – а = 0.

3) если 0 <*a*< 4 – все четыре корня подходят;

4) при*а* = 4 – три корня:

*x*2- 2*x*- 3 = 4 *x*2 - 2*x* - 3 = - 4

*x*2- 2*x* - 7 = 0 *x*2 - 2*x* + 1 = 0

 *х* = 1

Ответ: 1) если *a*< 0, то корней нет;

2) если *а* = 0, то *х*1 = -1, *х*2 = 3;

3) если 0 <*a*< 4, то *х*1,2,3,4 = 1;

4) если *а* = 4, то *х*1 = 1, *х*2,3 = 1;

5) если *а*> 4. то *х*1,2 = 1 .

Пример 2: Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение   имеет единственный корень. ( С5 ЕГЭ 2013г.)



 Запишем уравнение в виде и рассмотрим две функции и .



Рассмотрим функцию , преобразовывая подкоренное выражение, получим:



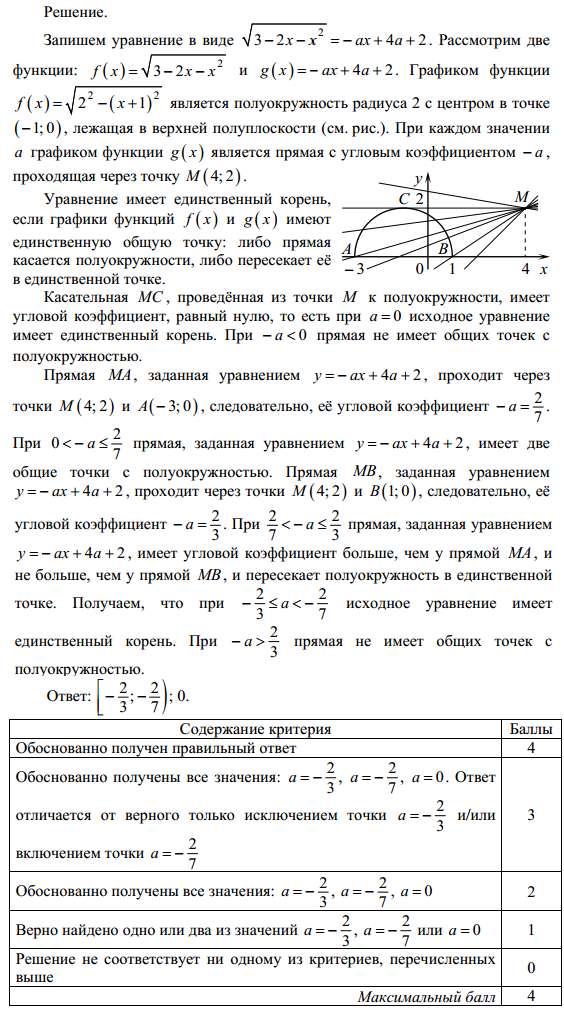
.   
Таким образом, получаем.функцию, графиком которой является полуокружность с радиусом 2 в центре с точкой (-1;0), лежащей в верхней полуплоскости.



Графиком функции является прямая с угловым коэффициентом -а, проходящая через точку М (4;2)



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций имеют одну общую точку (т.е. прямая касается или пересекает полуокружность в единственной точке).



Рассмотрим рисунок: 1. Прямая МС является касательной к полуокружности, следовательно, МС и полуокружность пересекаются в единственной точке. Так как МС параллельна оси ОХ ( У точки М (4,2) и С(-1,2)), то угловой коэффициент равен нулю. Таким образом, найдено первое значение а=0, при котором уравнение имеет один единственный корень.



2. Проведем прямую через точки М(4;2) и А(-3;0) ( так как координаты известны). Прямая МА пересекает график полуокружности в двух точках, но такая ситуация не удовлетворяет условию задачи. Поэтому надо найти значения углового коэффициента, при которых вышеназванное условие не выполняется. Чтобы найти значения –а подставим координаты точек М и А в функцию.



-4а+16а+2=2 3а+4а+2=0

12а=0 7а=-2

а=0. а=



Получаем, -а=0 и –а=.



При условии прямые имеют с графиком две общие точки, а это не удовлетворяет условию задачи.



3. Проведем прямую МВ через точки М(4;2) и В(1;0). Чтобы найти значения –а подставим координаты точек М и А в функцию.



3а+4а+2=0 -а+4а+2=0

7а=-2 3а=-2

а= а =



Получаем –а= и –а=. При условии прямые имеют с графиком одну общие точки и это удовлетворяет условию задачи.  
Ответ: а=0,



§3 Решение относительно параметра.

Если степень неизвестного слишком высока, а степень параметра не превосходит двух, то здесь эффективен метод решения уравнения (неравенства) относительно параметра.

Пример 1.Решить уравнение 2*х*3 – (*а* + 2)*х*2*– ах* + *а*2 = 0.

*Решение.* Перепишем уравнение в виде

2*х*3 – *ах*2 - 2*х*2 – *ах* + *а*2 = 0

*а*2 – (*х*2 + *х*)*а* + 2*х*3 - 2*х*2 = 0

Решим уравнение относительно параметра **а.**

*D* = (*х*2 + *х*)2 – 4(2*х*3 - 2*х*2) = *х*2(*х* + 1)2 – 8*х*2(*х* – 1) = *х*2(*х*2 + 2*х* + 1 – 8*х* + 8) = = *х*2(*х*2 – 6*х* + 9) = *х*2(*х* – 3)2



Тогда (*а* – *х*2 + *х*)(*а* – 2*х*) = 0

Осталось решить полученные уравнения относительно **х**.

*х*2 – *х* – *а* = 0 *а* – 2*х* = 0

имеет корни при

*D* = 1 + 4*а* ≥ 0 *х* =.

4*а* ≥ -1

*а* ≥ -

т.е. при *а* ≥ - 

при*а*< -  корней нет.

*Ответ:* 1) если  *а*< - , то корней нет; 2) если *а* ≥ -  , то , *х*3 = 

Пример 2.Решить уравнение 3*х*4 + *х*3 – 2(*а* + 1)*х*2 + 3*ах* – *а*2 = 0.[[1]](#footnote-1)\*

*Решение.* Заменим уравнение как квадратное по отношению к параметру а:

3*х*4 + *х*3 – 2*ах*2 – 2*х*2 + 3*ах* – *а*2 = 0

-*а*2 – (2*х*2 – 3*х*)*а* + 3*х*4 + *х*3 – 2*х*2 = 0

*а*2 + (2*х*2 – 3*х*)*а* – 3*х*4 – *х*3 + 2*х*2 = 0

*D* = (2*х*2 – 3*х*)2 – 4(2*х*2 – *х*3 – 3*х*4) = *х*2(2*х* – 3)2 – 4*х*2(2 – *х*– 3*х*2) =

= *х*2(4*х*2 – 12*х* + 9 – 8 + 4*х* + 12*х*2) = *х*2(16*х*2 – 8*х* + 1) = *х*2(4*х* – 1)2



*а*1 = *х*2 + *х*

*а*2 = -3*х*2 + 2*х* Тогда

(*а* – *х*2 – *х*)(*а* + 3*х*2 – 2*х*) = 0

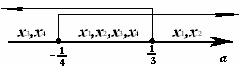
*а* – *х*2 – *х* = 0 3*х*2 – 2*х* + *а* = 0

*х*2 + *х* – *а* = 0 *D* = 4 – 12*а*

*D* = 1 + 4*аD* ≥ 0 при *а* ≤ 

*D* ≥ 0 при *а* ≥ - 





Произведя развертку по параметру а, получили

*Ответ:* 1) при*а*< - , ;

2) при, то , ;

3) при*а*>, то .

Приведем примеры решения еще нескольких заданий С5 из контрольно измерительных материалов ЕГЭ:

1.Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых система уравнений имеет ровно 4 решения.



Преобразуем данную систему:

Пусть t = y – 3, тогда система примет вид:



***3***

***4***

***-4***

***-3***

***х***

***t***

Количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы.

Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt.График первого уравнения – ромб, диагонали которого, равные 8 и 6, лежат на осях Ох и Оt, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом r = |a|.

Система имеет 4 решения, так как графики уравнений системы пересекаются в четырех общих точках. Значит, окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет условию 3 <r< 4.В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, откуда



Во втором случае получаем 3 <|a|<4, откуда −4 <a< −3; 3 <a< 4.

Ответ: а = ± 2,4; −4<a<−3; 3<a<4.

2.Най­ди­те все зна­че­ния , при каж­дом из ко­то­рых урав­не­ние

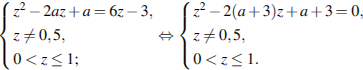


имеет хотя бы одно ре­ше­ние.

Введем за­ме­ну  по­это­му



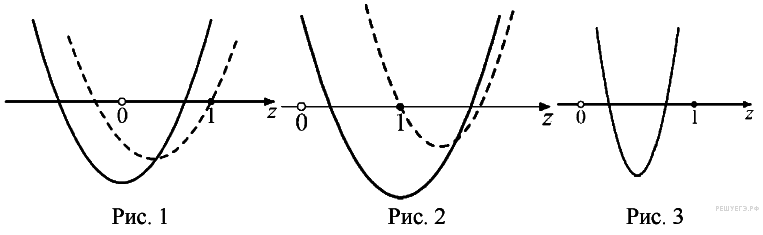
Пе­рей­дем к си­сте­ме:



При подстановке выясняется, что ни при одном зна­че­нии  число  не яв­ля­ет­ся кор­нем урав­не­ния.



Рас­смот­рим функ­цию , графиком является па­ра­бо­ла, ветви ко­то­рой на­прав­ле­ны вверх. Сле­до­ва­тель­но, усло­вие за­да­чи вы­пол­не­но если вы­пол­ня­ет­ся одно из трех усло­вий: Эти усло­вия со­от­вет­ству­ют сле­ду­ю­щим спо­со­бам рас­по­ло­же­ния гра­фи­ка функ­ции :



1) Трёхчлен имеет два раз­лич­ных корня, и толь­ко боль­ший из них лежит на про­ме­жут­ке (0; 1])(см.рис. 1), то есть

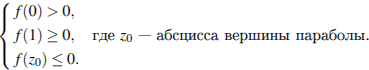


2) Трёхчлен имеет два раз­лич­ных корня, и толь­ко мень­ший из них лежит на про­ме­жут­ке (0; 1])(см.рис. 2), то есть



3)Трёхчлен имеет два корня, воз­мож­но, сов­па­да­ю­щих, и оба лежат на про­ме­жут­ке

(0; 1])(см.рис. 3), то есть



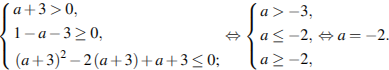
Решим си­сте­му 1:



Решим си­сте­му 2:



Решим си­сте­му 3:



Ответ:



3.Най­ди­те все зна­че­ния , при ко­то­рых урав­не­ние  на про­ме­жут­ке  имеет ровно два корня.



Рас­смот­рим функ­ции  и  Проанализируем   на про­ме­жут­ке



 При  все зна­че­ния функ­ции  на про­ме­жут­ке  не ­по­ло­жи­тель­ны, а все зна­че­ния функ­ции  — по­ло­жи­тель­ны, следовательно, при  урав­не­ние не имеет ре­ше­ний на про­ме­жут­ке



 При  функ­ция  воз­рас­та­ет на про­ме­жут­ке , Функ­ция  убы­ва­ет на этом про­ме­жут­ке, следовательно, урав­не­ние все­гда имеет ровно одно ре­ше­ние на про­ме­жут­ке , по­сколь­ку



 На про­ме­жут­ке  урав­не­ние  при­ни­ма­ет вид  Это урав­не­ние сво­дит­ся к урав­не­нию  Будем полагать, что , по­сколь­ку слу­чай  был рас­смот­рен ранее. Дис­кри­ми­нант квад­рат­но­го урав­не­ния  по­это­му при  это урав­не­ние не имеет кор­ней; при  урав­не­ние имеет един­ствен­ный ко­рень, рав­ный 2; при  урав­не­ние имеет два корня.



 Пусть урав­не­ние имеет два корня, то есть  Тогда оба корня мень­ше 5, по­сколь­ку при  зна­че­ния функ­ции не ­по­ло­жи­тель­ны, а зна­че­ния функ­ции  по­ло­жи­тель­ны. По тео­ре­ме Виета сумма кор­ней равна 4, а про­из­ве­де­ние равно Зна­чит, боль­ший ко­рень все­гда при­над­ле­жит про­ме­жут­ку , а мень­ший при­над­ле­жит этому про­ме­жут­ку тогда и толь­ко тогда, когда .



 Таким об­ра­зом, урав­не­ние  имеет сле­ду­ю­щее ко­ли­че­ство кор­ней на про­ме­жут­ке :1) Нет кор­ней при 2) Один ко­рень при 3) Два корня при  и 4) Три корня при



Ответ: ;



4.Най­ди­те все зна­че­ния а, при каж­дом из ко­то­рых урав­не­ние

имеет един­ствен­ный ко­рень.



Если  яв­ля­ет­ся кор­нем ис­ход­но­го урав­не­ния, то и  яв­ля­ет­ся его кор­нем. Следовательно, урав­не­ние имеет един­ствен­ный ко­рень, толь­ко если  то есть   Под­ста­вим зна­че­ние  в ис­ход­ное урав­не­ние:



 от­ку­да либо  либо  или



При  ис­ход­ное урав­не­ние при­ни­ма­ет вид:  Кор­ня­ми этого урав­не­ния яв­ля­ют­ся числа  и   то есть ис­ход­ное урав­не­ние имеет более од­но­го корня.



При  и при  урав­не­ние при­ни­ма­ет вид:



При  это урав­не­ние сво­дит­ся к урав­не­нию  ко­то­рое не имеет кор­ней. При  по­лу­ча­ем урав­не­ние  ко­то­рое имеет един­ствен­ный ко­рень.При  по­лу­ча­ем урав­не­ние  ко­то­рое не имеет кор­ней.



При  и при  ис­ход­ное урав­не­ние имеет един­ствен­ный ко­рень. Ответ:



Заключение.

В процессе проделанной работы в соответствии с ее целями и задачами были получены следующие выводы и результаты:

1. Рассмотрели основные способы решения уравнений и неравенств с параметром:

- аналитический способ;

- графический способ;

- решение относительно параметра;

2. Графический метод является удобным и быстрым способом решения уравнений и систем уравнений с параметрами, но нельзя полностью представить себе сложность и нестандартность решения каждой задачи с параметром, изучая только графический способ. Нельзя научиться решать любые задачи с параметрами, используя какой-то алгоритм или формулы.

3. В заданиях ГИА по математике в 9 классе уравнения, системы уравнений с параметром проще, удобнее и нагляднее решать графическим способом. В связи с этим разработали ряд задач с параметром в помощь учителю и ученику. ( см. приложение 2) Разработанный ряд задач можно использовать на факультативах по математике при подготовке к ГИА, при подготовке к олимпиадам или для привития интереса к математике, совершенствования математической культуры, навыков дедуктивного мышления и творческих исследовательских способностей. Данный справочник предложен 9 классникам.

Без задач с параметрами, как правило, не обходятся олимпиады всех уровней, вступительные экзамены в наиболее престижные вузы, поэтому мы планируем продолжить работу над этой темой.

Литература

1. Алгебра. 9 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г.Мордкович.- М.:Мнемозина, 2013;

2. Горнштейн П.И. «Задачи с параметрами. » Москва 2003г.;

3. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА – 2014: учебно-методические пособие/ Под ред.Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2013г.;

4. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013 : учебно-методические пособие/ Под ред.Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2012г.;

5. Солуковцева Л. «Линейные и дробно-линейные уравнения и неравенства с параметрами. Москва.2007г.;

6. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. Пособие для 10 кл. сред.шк. – М.: Просвещение, 1989.;

7.ЯстребинецкийГ.А.«Уравнения и неравенства, содержащие параметры», 1972г.

Приложение 1

Результаты социологического опроса в 9, 11 классах

1. Будут ли выпускники 2016 года решать на ГИА и ЕГЭ по математике задания с параметром.



2. Причина, по которой не будут решать задания с параметром.



Приложение 2

**Задание 23**

Подготовительные задания

**1.** Постройте график функции  и определите, при каких значениях параметра a прямая y = a не имеет с графиком общих точек.

**2.** Постройте график функции у = х² +1 и определите, при каких значениях параметра k прямая y = kx имеет с графиком ровно одну общую точку.

**3.** Постройте график функции у = |х – 1| + |х + 1| – 1 и определите, при каких значениях параметра k прямая у = kx имеет с графиком ровно одну общую точку.

**4.** Постройте график функции у = х² -2|х| и определите, при каких значениях параметра а прямая у = а имеет с графиком ровно две общих точки.

**5.** Постройте график функции



и определите, при каких значениях параметра а прямая у = а имеет с графиком ровно

две общие точки.

Тренировочные задания.

**1.** При каких отрицательных значениях с прямая у = сх – 9 имеет с параболой у = х² + 5х ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

**2.** Постройте график функции



Определите, при каких значениях k прямая у = k будет пересекать построенный график в трех точках.

Зачетные задания.

**1.** Постройте график функции  . Определите, при каких значениях параметра k прямая у = kx имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

**2.** Постройте график функции  и определите при каких значениях параметра а прямая у = а не имеет с графиком общих точек.

Оглавление

[Пояснительная записка 3](#_Toc226512054)

[Структура курса планирования учебного материала 4](#_Toc226512055)

[Краткое содержание курса 4](#_Toc226512057)

[I. Первоначальные сведения. 4](#_Toc226512058)

[II. Решение линейных уравнений (и уравнений приводимых к линейным), содержащих параметр. 5](#_Toc226512059)

[III. Решение линейных неравенств, содержащих параметр. 7](#_Toc226512060)

[IV. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр. 9](#_Toc226512061)

[V. Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами. 9](#_Toc226512062)

[VI. Тригонометрия и параметр. Иррациональные уравнения. 10](#_Toc226512063)

[VII. Показательные и логарифмические уравнения, содержащие параметр. Рациональные уравнения. 10](#_Toc226512064)

[VIII. Производная и ее применение. 10](#_Toc226512065)

[IX. Нестандартные задачи. 10](#_Toc226512066)

[Х. Текстовые задачи с использованием параметра. 11](#_Toc226512067)

[Планирование 11](#_Toc226512068)

[Заключение 12](#_Toc226512069)

[Задачи для самостоятельного решения. 13](#_Toc226512070)

[Литература 15](#_Toc226512071)

# Пояснительная записка

Цель профильного обучения в старших классах - обеспечение углубленного изучения предмета и подготовка учащихся к продолжению образования.

В заданиях ЕГЭ по математике с развернутым ответом (часть С), а также с кратким ответом (часть В), встречаются задачи с параметрами.

Появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно, т.к. с их помощью проверяется техника владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления учащегося и их математической культуры.

Решению задач с параметрами в школьной программе уделяется мало внимания. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими задачами, либо приводят громоздкие выкладки. Причиной этого является отсутствие системы заданий по данной теме в школьных учебниках. Трудности при решении задач с параметрами обусловлены тем, что наличие параметра заставляет решать задачу не по шаблону, а рассматривать различные случаи, при каждом из которых методы решения существенно отличаются друг от друга.

В связи с этим возникла необходимость в разработке и проведении элективного курса для старшеклассников по теме: «Решение задач с параметрами».

Многообразие задач с параметрами охватывает весь курс школьной математики. Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

При проведении занятий на первое место выходят следующие формы организации работы: лекционно-семинарская, групповая и индивидуальная. Рекомендуемые методы работы: исследовательский и частично-поисковый. Задачи с параметрами дают прекрасный материал для настоящей учебно-исследовательской работы.

**Задачи курса**

1. Сформировать у учащихся устойчивый интерес к предмету;
2. Выявить и развить математические способности;
3. Подготовить к ЕГЭ и к обучению в вузе

**Цель курса**

1. Формировать у учащихся умения и навыки по решению задач с параметрами, сводящихся к исследованию линейных и квадратных уравнений, неравенств для подготовки к ЕГЭ и к обучению в вузе.
2. Изучение курса предполагает формирование у учащегося интереса к предмету, развитие их математических способностей, подготовку к ЕГЭ, централизованному тестированию и к вступительным экзаменам в вузы
3. Развивать исследовательскую и познавательную деятельность учащегося.
4. Обеспечить условия для самостоятельной творческой работы.

**В результате изучения курса учащиеся должны**

1. Усвоить основные приемы и методы решения уравнений, неравенств систем уравнений с параметрами.
2. Применять алгоритм решения уравнений, неравенств, содержащих параметр.
3. Проводить полное обоснование при решении задач с параметрами.
4. Овладеть навыками исследовательской деятельности.

# Структура курса планирования учебного материала

## Темы:

1. Первоначальные сведения. 2ч
2. Решения линейных уравнений, содержащих параметры. 2ч
3. Решения линейных неравенств, содержащих параметры. 2ч
4. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметры. 7ч
5. Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами. 4ч
6. Тригонометрия и параметры. 2ч  
   Иррациональные уравнения. 2ч
7. Показательные и логарифмические уравнения, содержащие параметры.  
   Рациональные уравнения. 2ч
8. Производная и ее применения. 4ч  
   Графические приемы решения. 2ч
9. Нестандартные задачи с параметрами. 6ч
   * количество решений уравнений;
   * уравнения и неравенства с параметрами с некоторыми условиями
10. Текстовые задачи с использованием параметра. 4 ч

# Краткое содержание курса

## I. Первоначальные сведения.

Определение параметра. Виды уравнений и неравенств, содержащие параметр.  
Основные приемы решения задач с параметрам.  
Решение простейших уравнений с параметрами.

**Цель:** Дать первоначальное представление учащемуся о параметре и помочь привыкнуть к параметру, рассмотреть понятие «параметр», его существенный признак и двойственная природа, особенности записи ответов при решении заданий с параметром.

**Примерное содержание**.

Решить уравнение с параметром - это значит найти все те и только те значения параметра, при которых задача имеет решения.

Условимся считать, что параметры в уравнениях принимают действительные значения, в задачах с параметрами отыскиваются действительные решения.

Другими примерами равенств с параметрами могут служить общие виды функций, изучаемых в основной школе.

- линейная функция y=*k*x+*b*, (*k*, *b* - параметры, x, y- переменные);

- квадратичная функция y= *a*x²+*b*x+*c*, где *а*≠0 (*a*, *b*, *c*-параметры, x, y -переменные).

Задачи с параметрами мы встречаем и в геометрии. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид , где x, y- координаты точек - переменные, r- радиус окружности – параметр.

Моделируя различного вида задачи, можно получить различного вида уравнения, для которых нужно уметь выбирать ответы.

## II. Решение линейных уравнений (и уравнений приводимых к линейным), содержащих параметр.

Общие подходы к решению линейных уравнений. Решение линейных уравнений, содержащих параметр.  
Решение уравнений, приводимых к линейным.  
Решение линейно-кусочных уравнений.  
Применение алгоритма решения линейных уравнений, содержащих параметр.  
Геометрическая интерпретация.  
Решение системных уравнений.

**Цель:** Поиск решения линейных уравнений в общем, виде; исследование количества корней в зависимости от значений параметра.

**Примерное содержание.**

1. Алгоритм решения уравнений вида Ах=В.

|  |  |
| --- | --- |
| Решением является любое действительное число | При А=0 и В=0 |
| Нет решений | При А=0, |
| Единственное решение | При |

2. Рассмотреть примеры.

**ПРИМЕР 1: Решить уравнение: **

**Решение.**

Приведём данное уравнение к виду **Ах=В** и воспользуемся алгоритмом.

,

,



Рассмотрим случаи:

Если т.е.  и , то обе части уравнения разделим на . Получим , сократим дробь и получим **единственное решение уравнения: .**

Если , то подставив это значение параметра в уравнение, получим  или  - неверное числовое равенство, следовательно, данное уравнение **решений не имеет.**

Если , то подставив это значение параметра в уравнение, получим  или  - верное числовое равенство, следовательно, решением данного уравнения является **любое действительное число.**

**Ответ:** при  и  - **единственное решение уравнения: **

при  - **нет** **решений**

при  - **любое действительное число.**

**ПРИМЕР 2: Решить уравнение: **

**Решение.**

Приведём данное уравнение к виду **Ах=В** и воспользуемся алгоритмом.

,

,

,

.

Рассмотрим случаи:

Если т.е.  и , тогда получим **единственное решение уравнения: .**

Если , то подставив это значение параметра в уравнение, получим  Решение этого уравнения зависит от выражения, стоящего в правой части. Рассмотрим случаи: а) 2в – 1 = 0, т.е.  то подставив это значение параметра в уравнение, получим - верное числовое равенство, следовательно, решением данного уравнения является **любое действительное число.**

в) , т.е.  то подставив это значение параметра в

уравнение, получим  или  - неверное числовое равенство,

следовательно, данное уравнение **решений не имеет.**

3. Если , то подставив это значение параметра в уравнение, получим

 Решение этого уравнения зависит от выражения, стоящего в правой

части.

Рассмотрим случаи: а) 4 – а = 0, т.е.  то подставив это значение параметра в

уравнение, получим - верное числовое равенство, следовательно,

решением данного уравнения является **любое действительное число.**

в) , т.е.  то подставив это значение параметра в

уравнение, получим  или  - неверное числовое равенство,

следовательно, данное уравнение **решений не имеет.**

4. Если  и , то подставив эти значения параметров в уравнение, получим

- неверное числовое равенство, следовательно, данное уравнение **решений**

**не имеет.**

**Ответ:** при  и  - **единственное решение уравнения: **

при ,  или ,  - **любое действительное число**

при ,  или ,  - **нет** **решений.**

## III. Решение линейных неравенств, содержащих параметр.

Определение линейного неравенства.   
Алгоритм решения неравенств.  
Решение стандартных линейных неравенств, простейших неравенств с параметрами.  
Исследование полученного ответа.  
Обработка результатов, полученных при решении.

**Цель:** Выработать навыки решения стандартных неравенств и приводимых к ним, углубленное изучение методов решения линейных неравенств.

**Примерное содержание**.

1.На доске записаны следующие неравенства:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а) | б) | в) |

Задание. Решите неравенства и запишите ответ.

2.Сформулируйте свойства неравенств, которые использованы при решении.

Неравенства вида axb axb, где a и b действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называются линейными неравенствами.

В зависимости от коэффициентов a и b решением линейного неравенства может быть либо неограниченный промежуток, либо числовая прямая, либо пустое множество.

3.. Решение линейных неравенств вида aх>b.

если a>0, то .

если a<0, то .

если a=0 и b<0, то .

Если a=0 и b0, то решений нет.

**Пример 1.** Решите неравенство ах>1.

1) если a>0, то 

2) если a<0, то 

3) если a=0, то решений нет.

4. Решение линейных неравенств вида aх<b.

если a>0, то .

если a<0, то .

если a=0 и b>0, то .

если a=0 и b0, то решений нет.

**Пример 2**. Решите неравенство ах<5.

1) если a>0, то 

2) если a<0, то 

3) если a=0, то  .

5. Решение линейных неравенств вида axb.

если a>0, то .

если a<0, то .

если a=0 и b0, то .

если a=0 и b>0, то решений нет.

**Пример 3.** Решите неравенство ax4.

1) если a>0, то 

2) если a<0, то 

3) если a=0, то решений нет.

6. Решение линейных неравенств вида ax b

если a>0, то .

если a<0, то .

если a=0 и b 0, то .

если a=0 и b<0, то решений нет.

Пример 4. Решите неравенство ах 6.

1) если a>0, то ;

2) если a<0, то ;

3) если a=0, то  .

7. Решить неравенства.

(m-1)x<5m

если m-1>0, т.е. m>1, то ,

2 если m-1<0, т.е. m<1, то ,

3. если m-1=0, т.е. m=1, то .

(a-1)x>6

если a-1>0, т.е. a>1, то ,

2. если a-1<0, т.е. a<1, то ,

3. если a-1=0, т.е. а=1, то решений нет.

При каких значениях параметра b уравнение  имеет положительный корень?

Решение.

Так как корень х>0, то 0,8 b+14>0; 0,8 b>-14; b>-1,75.

Ответ: при b>-1,75

## IV. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр.

Актуализация знаний о квадратном уравнении. Исследования количества корней, в зависимости от дискриминанта. Использование теоремы Виета. Исследование трехчлена.  
Алгоритм решения уравнений.  
Аналитический способ решения.  
Графический способ.  
Классификация задач, с позиций применения к ним методов исследования.

**Цель:** Формировать умение и навыки решения квадратных уравнений с параметрами.

Примерное содержание.

1.Повторить

Теорему Виета.

Тождество 

Свойства функций  и 

При каких значениях a, b, c и Д корни квадратного уравнения одного или разных знаков.

5. Выделение полного квадрата из квадратного трёхчлена.

2.Решить уравнения: 1)*a*x² + 2x + 4=0,

2)(*a* + 3)x²+2x(*a*+5)+2*a*+7=0.

Ответ: 1) x=-2 при *а=*0; х=-4 при *а*=1/4; при ; не имеет корней при *а* >1/4 .2) х=-1/4 при *а*=-3; х=1, х=-3/2

при *а*=-4,*а*=1;  при ; не имеет корней при .

## V. Свойства квадратичной функции в задачах с параметрами.

Область значений функции.  
Область определения функции.  
Монотонность. Координаты вершины параболы.

**Цель:** Познакомить с многообразием задач с параметрами.

Примерное содержание.

Квадратичная функция задаётся формулой y=*a*x²+*b*x+*c*, гдепараметры, x и y- переменные. Графиком квадратичной функции является парабола.



Коэффициент *a* определяет направление ветвей параболы. Если *а* >0 , то они направлены вверх, если *а*<0, то направлены вниз. Дискриминант квадратного трёхчлена *D=b²-4ac* определяет наличие и количество общих точек с осью Ох. Если *D*<0, то парабола не пересекает ось абсцисс. Если *D*=0, то парабола и ось имеют одну общую точку. Если *D*>0, то общих точек две.

Графический способ решения задач с параметрами является универсальным, а значит (обратная сторона любой универсальности), есть конкретные случаи, когда задачу можно решить несколько проще.

Пусть для функции y=*a*x²+*b*x+*c*, гдепараметры, x и y — переменные. Числа и – нули функции, *D = b– 4ac, D* > 0, , = - - абсцисса вершины параболы. В этих задачах, как правило, требуется определить те значения параметра, при которых выполняется некоторое условие для расположения корней.



## VI. Тригонометрия и параметр. Иррациональные уравнения.

Использование основных свойств тригонометрических функций в задачах с параметрами. Тригонометрические уравнения, содержащие параметр.  
Тригонометрические неравенства, содержащие параметр.  
Область значений тригонометрических функций.

**Цель:** Сформировать умение использования свойств тригонометрических функций при решении тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами.   
Исследование дробно-рациональных уравнений, содержащих параметры.

## VII. Показательные и логарифмические уравнения, содержащие параметр. Рациональные уравнения.

Свойства степеней и показательной функции. Решение показательных уравнений и неравенств, содержащих параметры.  
Свойства логарифмов и логарифмической функции. Решение логарифмических уравнений и неравенств с параметрами.  
**Цель:** Сформировать умение решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметрами, рациональные уравнения

## VIII. Производная и ее применение.

Касательная к функции.  
Критические точки.  
Монотонность.  
Наибольшие и наименьшие значения функции.  
Построение графиков функций.

**Цель:** Познакомить учащихся с типом задач с параметрами на применение методов дифференциального исчисления.

## IX. Нестандартные задачи.

Уравнения высших степеней. Теорема Безу. Симметрические уравнения. Система однородных уравнений и приводящиеся к ним. Аналитические способы решения уравнений высших степеней с параметрами. Графический способ решения уравнений высших степеней с параметром

## Х. Текстовые задачи с использованием параметра.

Задачи физического содержания. Задачи на объемные доли и концентрации вещества. Задачи на проценты.

В этом разделе формируются навыки решения текстовых задач.

# Планирование

(34 часа)

|  |  |
| --- | --- |
| № урока | Тема |
| 1 | Основные понятия уравнений с параметрами |
| 2 | Основные понятия неравенств с параметрами |
| 3-4 | Уравнения с параметрами (первой степени) |
| 5-6 | Неравенства с параметрами (первой степени) |
| 7-11 | Уравнения с параметрами (второй степени) |
| 12-14 | Неравенства с параметрами (второй степени) |
| 15-16 | Рациональные уравнения с параметрами |
| 17-18 | Графические приемы при решении |
| 19-20 | Свойства квадратичной функции |
| 21-23 | Текстовые задачи с использованием параметра |
| 24-25 | Иррациональные уравнения с параметрами |
| 26-28 | Параметр и количество решений уравнений, неравенств и их систем |
| 29-30 | Уравнения и неравенства с параметрами с различными условиями |
| 31-32 | Нестандартные задачи |
| 33 | Итоговая контрольная работа по курсу |
| 34 | Защита индивидуальных проектов |

# Заключение

Введение элективного курса «Решение задач с параметрами» необходимо учащимся в наше время, как при подготовке к ЕГЭ, так и к вступительным экзаменам в вузы. Владение приемами решения задач с параметрам можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Решение задач, уравнений с параметрами, открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях и на любом другом математическом материале. Именно такие задачи играют большую роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, Поэтому учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются с другими задачами.

## Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить уравнение: 

2. Решить уравнение: 

3. Решить уравнение: 

4. Решить уравнение: 

5. Решить уравнение: 

6. Решить уравнение: 

7. Решить уравнение: 

8. Решить уравнение: 

9. Решить уравнение: 

10. Решить уравнение: 

11. При каких значениях параметра *в* уравнение :

а) имеет бесконечно много корней; в) имеет корень, равный единице;

б) не имеет корней; г) имеет ненулевые корни?

12. При каких значениях *а* уравнение имеет:

а) только положительные корни; б) только отрицательные корни?

13. Решить уравнение: :

а) относительно *х*  и найдите значение параметра, при котором корень равен нулю;

б) относительно *у*  и найдите значение параметра, при котором корень равен единице?

14. При каких значениях параметра *в* число 1 является корнем уравнения ?

15. При каких значениях параметра *а* уравнение  имеет корни не равные

3?

16. Решить уравнение х2+*а*2 - 1 =0.

Ответ: при │*а*│>1 корней нет, при других *а* х=±.

17. Решить уравнение *а*х2-х+3 =0.

Ответ: при *а*=0 х=3, при *а*= х=6, при *а*> корней нет, при других *а*

х=.

18. Решить неравенство *а*х2 +( *а*+1)х+1>0 при различных значениях *а*.

Ответ: при *а*=0 х>-1; при *а*=1 х Є (-∞; -1)U(-1; +∞), при *а*>1 х Є (-∞; -1)U( -1/*а*; +∞),

при *а*<0 х Є (-1; -1/*а*); при *а* Є (0;1) х Є (-∞; -1/*а*)U(-1; +∞).

19. При каких значениях параметра *а* неравенство х2+*а*х+1<0 не имеет решений?

Ответ: *а*Є[-1;1].

20. Решить неравенство х2-4*а*х+9 ≤0.

Ответ: при │*а*│>1,5 решений нет,при *а*=1,5 х=3, при *а*=-1,5 х=-3, при других *а* хє[2*а*-; 2*а*+].

21. При каком значении параметра *а* система  имеет ровно два решения?

Ответ: *а*=2.

22. Решить неравенство х2 - 2*а*х + 1>0 для всех значений параметра *а*.

Ответ: при |*а*|>1 х Є R,

при *а*=1 х Є R, где х ≠ 1,

при *а*=-1 х Є R, где х ≠ -1,

при -1<*a*<1 х Є (-∞;-)U(*а*+; +∞).

23. При каких значениях *а* неравенство *а*х2 +4*а*х +*а*+3<0 выполняется для всех действительных значений х?

Ответ: *а* Є (-∞; -4).

24. При каких значениях параметра *m* двойное неравенство

 выполняется при всех действительных значениях х?

Ответ: *m* Є (-2; 4).

1. [↑](#footnote-ref-1)