**ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛИ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Автор: Девятайкина Алёна Максимовна, Учётно-Финансовый факультет, 1 курс, 7 группа

Аннотация

Линейное программирование, метод исследования операций, широко используется в поиске решений сложных проблем управленческого решения. Фирмам при планировании было трудно распределять скудные ресурсы таким образом, чтобы обеспечить максимизацию прибыли или минимизацию затрат. Это исследование было проведено с целью поиска и получения оптимального продукта-смеси продуктивной фирмы. Производственная задача фирмы была сформулирована как задача линейного программирования и оценена как таковая.

Ключевые слова: оптимизация прибыли, линейное программирование.

Введение

Линейное программирование - это название области прикладной математики, которая занимается решением задач оптимизации определенной формы. Задачи линейного программирования состоят из функции линейной стоимости (состоящей из определенного числа переменных), которая должна быть минимизирована или максимизирована с учетом определенного числа ограничений. Ограничения - это линейные неравенства переменных, используемых в функции стоимости. Функция стоимости также иногда называется целевой функцией. Линейное программирование тесно связано с линейной алгеброй; самое заметное отличие состоит в том, что линейное программирование часто использует неравенства в постановке задачи, а не равенства.

История

Линейное программирование - сравнительно молодая математическая дисциплина, возникшая в 1947 году из-за изобретения симплекс-метода Г. Б. Данцигом. Исторически развитие линейного программирования обусловлено его приложениями в экономике и управлении. Первоначально Данциг разработал симплекс-метод для решения задач планирования ВВС США, а проблемы планирования и планирования по-прежнему доминируют в приложениях линейного программирования. Одна из причин того, что линейное программирование является относительно новой областью, состоит в том, что только самые маленькие проблемы линейного программирования могут быть решены без компьютера.

Пример

Проблемы линейного программирования естественным образом возникают при планировании производства. Предположим, что ОАО «Нептун» может создавать эскорты со скоростью один раз в минуту, зонды со скоростью один раз в 2 минуты и навигаторы со скоростью один раз в 3 минуты. Транспортные средства получают 25, 15 и 10 миль на галлон соответственно, и руководство обязывает, чтобы средняя экономия топлива производимых транспортных средств составляла не менее 18 миль на галлон. ОАО «Нептун» теряет 1000 рублей за каждого эскорта, но получает прибыль в размере 5000 рублей за каждого проводника и 15000 долларов за каждый навигатор. Какую максимальную прибыль может получить ОАО «Нептун» за один 8-часовой рабочий день?

Функция стоимости - это прибыль, которую Форд может получить, создав x-эскорты, y-зонды и z-навигаторы, и мы хотим максимизировать ее:

- 1000x + 5000y + 15000z (1.3.1)

Ограничения возникают из-за времени производства и мандата Конгресса на экономию топлива. В 8-часовом дне 480 минут, поэтому время производства приводит к следующему ограничению:

x + 2y + 3z ≤ 480 (1.3.2)

Среднее ограничение экономии топлива может быть записано:

25x + 15y + 10z ≥ 18 (x + y + z) (1.3.3)

что упрощает до:

7x – 3y – 8z ≥ 0 (1.3.4)

Существует дополнительное неявное ограничение, что все переменные неотрицательны: x, y, z ≥0

Эта проблема планирования производства теперь может быть записана в краткой форме следующим образом:

 Максимизировать - 1000x + 5000y + 15000z
 с учетом x + 2y +3z ≤ 480
7x – 3y – 8z ≥ 0 (1.3.5)
x, y, z ≥0

Решением этой проблемы является x = 132,41, y = 0 и z = 115,86, что дает значение функции стоимости 1 605 517,24. Обратите внимание, что для некоторых задач нецелые значения переменных могут быть нежелательны. Решение задачи линейного программирования только для целочисленных значений переменных называется целочисленным программированием и представляет собой значительно более сложную задачу. Решение задачи целочисленного программирования не обязательно близко к решению той же задачи, решаемой без целочисленного ограничения. В этом примере оптимальным решением, если x, y и z ограничены целыми числами, является x = 132, y = 1 и z = 115 с результирующим значением функции стоимости (прибылью) в размере 1 598 000 рублей.

Симплекс-метод

Как это устроено?

Симплексный метод состоит из двух основных этапов, часто называемых «фазами». Первый этап заключается в поиске приемлемого решения проблемы. Для небольших проблем или больших проблем определенных форм это совсем не сложно. Часто тривиальное решение, такое как x = 0, является возможным решением, как в задаче планирования производства, описанной ранее. Мы опустим детали решения первого этапа, чтобы найти выполнимое решение на данный момент.

После того, как найдено реальное решение проблемы, симплекс-метод работает путем многократного улучшения значения функции стоимости. Это достигается путем нахождения переменной в задаче, которая может быть увеличена за счет уменьшения другой переменной таким образом, чтобы обеспечить общее улучшение функции стоимости. Это можно визуально представить как перемещение по краям выполнимого набора из угла в угол. Далее следует двумерный пример.

Геометрическая интерпретация симплекс-метода

Рассмотрим задачу линейного программирования:

максимизируйте x + y с учетом

2x + y ≤ 14 –x +2 y≤8 (3.2.1)
2x - y ≤ 10 x ≥ 0, y ≥ 0

Возможный набор этой проблемы может быть представлен в двух измерениях, как показано на рисунке 1. Ненулевые ограничения x ≥ 0 и y ≥ 0 ограничивают допустимый набор первым квадрантом. Остальные три ограничения - это линии в плоскости x-y, как показано. Функция стоимости, x + y, может быть представлена ​​в виде линии наклона –1 с любым пересечением. Значение пересечения строки функции стоимости - это значение функции стоимости для любого решения, лежащего вдоль этой линии. Жирная линия на рисунке 1 представляет оптимальное решение проблемы, поскольку именно линия с наклоном –1 с максимальным пересечением (10) пересекает допустимое множество. Значение функции стоимости для этого оптимального решения равно 10, а строка функции стоимости x + y = 10 имеет ровно одну точку в допустимом наборе: x = 4, y = 6.

Симплексный метод работает, находя допустимое решение, а затем перемещается из этой точки в любую вершину допустимого множества, которое улучшает функцию стоимости. В конце концов достигается угол, из которого любое движение не улучшает функцию стоимости. Это оптимальное решение. В этом примере x = 0 и y = 0 - тривиальное выполнимое решение, и его значение функции стоимости равно 0. Это вершина A на рисунке 1. Из этой точки мы можем либо перейти в точку B, либо в точку E. Точка. E (0, 4) увеличивает функцию стоимости до 4, в то время как точка B (5, 0) увеличивает ее до 5. Так как точка B дает нам большее улучшение, мы выберем ее в качестве нашей первой итерации (хотя мы могли бы также иметь выбрал E и, по сути, быстрее достиг бы оптимального решения) Значение х увеличивается от 0 до 5, а у остается 0.



Из точки B мы проверяем, выгодно ли перемещение в точку C. (Мы знаем, что возврата к A нет.) Точка C (6, 2) имеет значение функции стоимости 8, что является улучшением. Поэтому мы увеличиваем x с 5 до 6, что означает, что из-за ограничений 2x - y ≤ 10 и –x + 2y ≤ 8 мы также должны увеличить y с 0 до 2. Теперь из точки C мы проверяем, следует ли переходить к точка D улучшает ситуацию. Функция стоимости в D (4, 6) равна 10, поэтому мы принимаем движение и увеличиваем y с 2 до 6. Это означает, что x должно уменьшиться с 6 до 4 из-за ограничений. Теперь, поскольку перемещение в точку E (значение функции стоимости 4) или в точку C (значение функции стоимости 8) уменьшает функцию стоимости, мы знаем, что точка D является оптимальным решением этой проблемы.

Алгебраическое решение с использованием симплекс-метода.

Та же самая проблема, проиллюстрированная графически выше, может быть решена с использованием только алгебраических манипуляций. Сначала мы переписываем уравнение (3.2.1), добавляя слабые переменные для преобразования ограничений неравенства в равенства: максимизируйте x + y = z с учетом

 2x + y + r = 14 - x + 2 y + s = 8 (3.3.1)
2x - y + t = 10
x, y, r, s, t ≥ 0

Симплексный метод начинается с фиксации достаточного количества переменных в 0 (их нижней границы) и «удаления» их из задачи, так что система Ax = b является квадратной. В этом случае с добавленными переменными есть 5 переменных и 3 ограничения, поэтому нам нужно установить две переменные в 0 и удалить их коэффициенты из задачи, чтобы превратить матрицу A в матрицу 3x3. Решение системы в этом случае представляет собой одну из вершин допустимого множества, как геометрически проиллюстрировано на рисунке 1. Очевидным возможным решением этой проблемы является x = 0, y = 0. Эти две переменные установлены в ноль и «Удален» от проблемы. Такие переменные называются неосновными переменными. Решение этой системы тогда r = 14, s = 8, t = 10. Эти три переменные называются основными переменными для этого решения.

Теперь перепишем задачу с ограничениями в виде уравнений для основных переменных r, s и t:

z = x + y
r = 14 - 2 x – y
s = 8 + x – 2 y (3.3.2)
t = 10 - 2 x + y
x, y, r, s, t ≥ 0

Чтобы начать итерацию симплекс-метода, мы ищем способ увеличить функцию стоимости, z. Глядя на неосновные переменные x и y, мы пытаемся увеличить одну из них, удерживая другую в нуле. Однако количество, которое мы можем увеличить x, ограничено неотрицательными ограничениями на основные переменные. Глядя на переформулированные ограничения, показанные выше, мы видим, что для первого ограничения для r ≥ 0 мы должны иметь x ≤ 7. Второе ограничение не ограничивает x, так как увеличение x увеличивает s, в то время как третье ограничение налагает ограничение, которое x ≤ 5. Поэтому мы решили увеличить x с нуля до 5 и пересчитать значения r, s и t из приведенных выше уравнений: r = 4, s = 13 и t = 0. Поскольку x идет от нуля если он не равен нулю, говорят, что он входит в базис и называется входной переменной для этой итерации. Поскольку t переходит от ненулевого к нулю, говорят, что он покидает базис и называется уходящей переменной. Наша база теперь состоит из переменных r, s и x, а переменные t и y не являются основными и, следовательно, равны нулю. Наша целевая функция z теперь имеет значение 5.

Теперь мы переписываем всю проблему так, чтобы целевая функция и ограничения выражались только как функции неосновных переменных t и y, переставляя уравнение ограничения для t сверху, чтобы оно было равно x = 5 - 0,5t + 0,5y, и подставляя в другие уравнения:

z = 5 - 0,5t + 1,5y
r= 4 + t – 2y
s= 13 - 0,5t - 1,5y (3.3.3)
x = 5 - 0,5t + 0,5y
x, y, r, s, t ≥ 0

Теперь мы повторим симплекс-метод снова. Чтобы увеличить z, мы должны увеличить y на этот раз. Ограничение по r ограничивает y менее 2, ограничение по s ограничивает y менее 8,67, а ограничение по x не ограничивает y. Поэтому мы выбираем y как входную переменную со значением 2, а r как выходную переменную. Уравнение для r переставляет в y = 2 –0,5r + 0,5t. Подставляя в выходы:

z = 8 - 0,75р + 0,25t
у = 2 - 0,5 р + 0,5 t
s = 10 + 0,75r - 1,25t (3.3.4)
x = 6 - 0,25r - 0,25t
x, y, r, s, t ≥ 0

Обратите внимание, что когда задача находится в такой форме, мы можем прочитать текущие значения основных переменных и целевой функции из констант, расположенных справа от знаков равенства. Переменные справа от уравнений являются неосновными и имеют нулевое значение. Чтобы увеличить z для следующей итерации, у нас нет другого выбора, кроме как увеличить t. Ограничение для s ограничивает t до 8, в то время как ограничение для x ограничивает t до 24. Следовательно, t входит со значением 8 и s покидает основу. Переставленное уравнение имеет вид t = 8 + 0,6r - 0,8 с. Подставляя, имеем:

z = 10 - 0,6r - 0,2s
y = 6 - 0,2r - 0,4s
t = 8 + 0,6r - 0,8s (3.3,5)
x = 4 - 0,4r - 0,4s
x, y, r, s, t ≥ 0

Теперь целевая функция z имеет значение 10. Рассматривая уравнение для z, мы видим, что мы не можем поднять ни r, ни s выше нуля без уменьшения z. Это означает, что больше нет выгодных изменений, которые мы можем внести в решение, поэтому оно должно быть оптимальным. Следовательно, решение этой задачи линейного программирования - x = 4, y = 6, со значением целевой функции 10.

Пересмотренный симплекс-метод

Пересмотренный симплекс-метод - это название реализации симплекс-метода, в котором используется несколько иной метод обновления задачи на каждой итерации: вместо обновления задачи с использованием результатов предыдущей итерации используются исходные данные. Каждая итерация все та же, но пересмотренный симплекс-метод более эффективен в вычислительном отношении, особенно для больших и редких задач. Это подробно описано в книге Хватала [2].

Вывод

Линейное программирование является важной отраслью прикладной математики, которая решает широкий спектр задач оптимизации. Он широко используется в задачах планирования производства и планирования. Многие недавние достижения в этой области пришли из авиационной отрасли, где планирование самолетов и экипажей значительно улучшилось благодаря использованию линейного программирования. Он также использовался для решения множества проблем с назначением, таких как проблема кариотипирования, когда 46 хромосом назначены 24 классам. Хотя пересмотренный симплекс-метод не является теоретически удовлетворительным с вычислительной точки зрения, он, безусловно, является наиболее широко используемым методом для решения задач линейного программирования и лишь в редких случаях его ограничения встречаются в практических приложениях. Самое большое преимущество линейного программирования как метода оптимизации состоит в том, что оно всегда достигает оптимального решения, если оно существует.

Список литературы

1. Г. Странг, Линейная алгебра и ее приложения, 3-е изд. Сан-Диего: Харкорт Брейс Йованович, 1988.

2. В. Чваталь, Линейное программирование. Нью-Йорк: У. Х. Фриман, 1983