Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение  
«Средняя общеобразовательная школа №2 пгт. Кировский»   
Приморского края

**ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ: задачи с параметром**

Методическая разработка

Осинцева Наталья Николаевна, учитель математики

пгт. Кировский

2023 г.

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ……………………………………………………………………….. 3

ПРИМЕРЫ СТАРТОВЫХ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ……………………. 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ…………………………………………………………………… 7

ЛИТЕРАТУРА…………………………………………………………………….. 8

**ВВЕДЕНИЕ**

*Пусть дано уравнение с двумя переменными F(x, a) = 0. Если в задаче сформулирована цель: «Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение относительно x», то выражение F(x, a) = 0 называют уравнением с переменной x и параметром а, а множество A – областью изменения параметра а*[[1]](#footnote-1) (от греческого слова parametron - отмеривающий).

Задания с параметром встречаются в школьных учебниках с 7 по 11 класс. Просто при этом не звучит само слово «параметр». Например, в теме «Квадратные уравнения» мы отвечаем на вопросы «При каких целых значениях переменной q данное уравнение имеет 2 корня, только 1 корень, не имеет решения» и т.п. Т.е. задания интегрированы, отдельно данный материал можно рассматривать на углубленном уровне. И вот наши учащиеся сталкиваются с заданием части II ЕГЭ профильного уровня. Задача учителя – дать ученику старт с дальнейшим развитием ситуации успеха.

Актуальность данного материала обусловлена количеством баллов за задание с параметром. Тем не менее, при подготовке к ЕГЭ учащиеся либо вообще не хотят начинать тренироваться по теме, либо быстро остывают к этим задачам. Я думаю, что в первую очередь необходимо преодолеть некий психологический барьер, показать ученикам, что решение задач с параметром им по силам. Следовательно, отбор заданий для начала осуществим по принципам: от знакомого к новому, от простого к сложному. Пусть изначально просматриваются этапы решения, само решение не будет перегружено, т.к. из-за громоздких вычислений и большого числа ветвлений можно потерять нить рассуждений. Необходимо выбрать наиболее яркие примеры для графического и аналитического методов решения.

Методом проб и ошибок я пришла к выводу, что лучше всего соблюсти преемственность: в части 2 ОГЭ по математике присутствует задание по теме «Функции и их свойства. Графики функций» (например, (1) требуется построить график функции  и (2) определить, при каких значениях m прямая  y=m имеет с графиком ровно две общие точки, одну, более двух и т.п.). Пункт (2) сводится к решению системы графическим методом.

Как правило, сильные ученики успешно решают такие задачи на ОГЭ. Поэтому имеет смысл начинать рассматривать задания ЕГЭ с параметром, где уравнение можно привести к системе, и решать эту систему далее графически (см. Задачу 1).

Достаточно понятны в решении задачи с уравнениями окружностей, которые можно решать аналитически, используя координатный метод (см. Задачу 2).

В задачах 3 и 4 также присутствуют как графический метод, так и аналитический.

**ПРИМЕРЫ СТАРТОВЫХ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ**

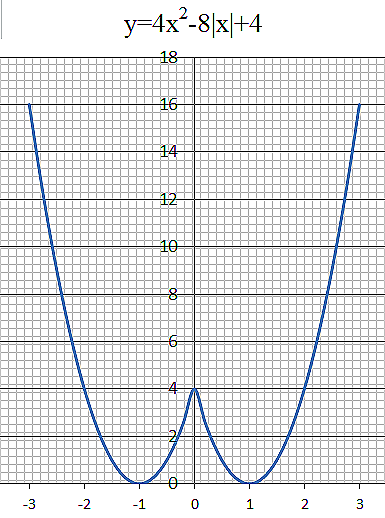
**Задача №1**

Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение 4х2-8|х|+4-*а*2=0 имеет ровно 2 корня.

**Решение:** Представим уравнение в виде 4х2-8|х|+4=*а*2.

Решаем графически систему уравнений аналогично, как в 9 классе.

Преобразуем выражение (1): или

Строим график функции (1): для отрицательных х парабола с вершиной в точке (-1;0), для положительных х – с вершиной (1;0). Далее строим линии уровня (2) у=а2, находим значения а2, при которых точек пересечения линий уровня с графиком функции (1) будет ровно две.

Условие будет выполнено, если

у=*а*2

*a*2>4 ⇔ *a*2-4=0 ⇔ (*a*-2)(*a*+2)=0

+ \_ + ⇒

**Рис.1**

-2 2

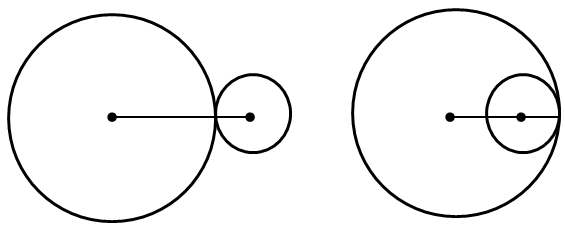
**Ответ:** *a*∈(-∞;-2)⋃{0}⋃(2;+ ∞).

**Задача №2**

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

**Решение:** Очевидно, что уравнения (1) и (2) – уравнения окружностей радиусов соответственно 1 и 3.

Окружность (1): центр – точка О1(3*а*+4; *а*-2), радиус r1=1; окружность (2): центр – точка О2(4*а*+3; -3), радиус r2=3.

Поскольку система имеет единственное решение, то у данных окружностей одна общая точка, причем касание может быть как внешнее, так и внутреннее (см. рис.2). При этом расстояние между их центрами

**Рис.2**

**(\*) (\*\*)**

**r2 r1 r2 r1**

; r1+r2=4, r2-r1=2

**Рис.2**

Формула для расстояния между точками

O1O22=(4*а*+3-3*а*-4)2+(-3-а+2)2=(а-1)2+(а+1)2=а2-2а+1+а2+2а+1=2а2+2.

⇔

**Ответ:**

**Задача №3**

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет более двух решений.

**Решение:** В зависимости от знака выражения под модулем в (1) мы получим 2 линии.

- дуга окружности с центром в точке (1; -1) радиуса 1 с ограничением (3) .

 - дуга окружности с центром в точке (-1; 1) радиуса с ограничением (4)

Дуги окружностей, полученных при исследовании уравнения (1), построены с учетом ограничений на рис.3 (4-ая четверть координатной плоскости).

**Рис.3**

Теперь рассмотрим прямую, заданную уравнением (2). Прямая пересекает оси ОХ и ОУ в точках (1; 0) и (0; -*а*). При *а*=1 прямая (проведена сплошной линией на рис.3) имеет 2 общие точки с дугами окружностей – это точки (1; 0) и (0; -1) – первое крайнее положение.

При уменьшении *а* прямая не будет пересекать данные дуги более, чем в двух точках, одна из которых – (1; 0).

Для того, чтобы общих точек было больше двух, необходимо достичь еще одного пересечения с дугой большой окружности (r=). Поэтому ищем второе крайнее положение прямой.

Найдем значение параметра *а*, при котором прямая (2) является касательной к данной окружности.

Для этого должно выполняться условие

⇒ .

Мы нашли второе крайнее положение прямой, при котором прямая является касательной к дуге большой окружности, и решений будет ровно 2.

Таким образом, при значениях *а* из интервала (1; 2) прямая (2) будет пересекать дуги большей и меньшей окружностей в точках, не лежащих на координатных осях. С учетом точки (1; 0) имеем 3 точки пересечения.

**Ответ:** *а*∈(1; 2)

**Задача №4**

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решением системы неравенств является отрезок, длина которого равна 2

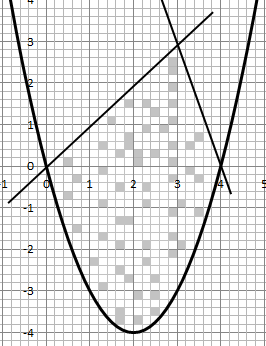
1. (3)

(3;3)

**y=a**

(2)

**Рис.4**

**Решение:** Перепишем неравенства в системе:

Построив графики левых частей неравенств (см. рис.4), находим область ограничений для параметра *а*. Прямая *y=a* пересекает область, если *а*∈(-4; 3).

1. Отрезок длины 2 есть средняя линия треугольника с координатами (0; 0), (3; 3), (4; 0)., т.к. его основание длины 4. Высота данного треугольника равна 3, следовательно, делим пополам. Прямая y=1,5 содержит среднюю линию треугольника, при этом все те значения *x*, которые являются решениями нашей системы, лежат на отрезке длины 2.
2. Осуществляя параллельный перенос прямой *y=a* вниз, приходим к выводу, что есть еще значение *а*, удовлетворяющее условиям нашей задачи. Парабола *у=х2-*4*х* имеет ось симметрии *х=*2, следовательно, от нее равноудалены на расстояние, равное 1, две точки: *х*1*=*1 и *х*2*=*3, расстояние между этими точками равно 2.

*у*(1)=*у*(3)=32-4\*3= -3. Прямая у=-3 содержит отрезок длины 2, заключенный между ветвями параболы *у=х2-*4*х*. Второе значение параметра найдено.

**Ответ:** *а*=1,5 ; -3

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В своей работе я рассмотрела несколько заданий, которые, по моему мнению, являются удачными для знакомства учащихся с разделом «Задачи с параметрами». Я построила для себя эту маленькую оптимальную систему, которую считаю наиболее удачной, судя по рефлексии учащихся. Конечно, судить о результативности можно только по ЕГЭ. Так что придется подождать. Если у учителя есть время для изучения данной темы – это хорошо. Он даст ученикам полный расклад: классификацию, приемы решения, пояснит оптимальность отбора методов и т.д. Я исхожу из того, что этого времени практически нет.

Решая данные задачи, учащийся не только строит графики. После построений у него есть возможность почувствовать себя исследователем, выдвигающим предположение о значениях параметра, проверить свою гипотезу аналитически. В руках ученика и геометрические способы, и методы математического анализа, и т.д. Он может использовать все свои знания и умения.

Получение верного результата укрепит в учащемся уверенность в своих силах в ходе подготовки к экзамену, даст дополнительный стимул к получению высокого балла ЕГЭ.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Семенов А.В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] – М: «Интеллект- Центр», 2023.
2. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004

1. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004 [↑](#footnote-ref-1)