**Платоновы тела.**

Автор: Акобян Айк Самвели,

МБОУ СОШ №3, 11 класс

Научный руководитель: Рабцун Лидия Васильевна,

учитель математики высшей квалификационной категории

МБОУ СОШ № 3

Сургут, 2020 г.

**Оглавление**

Введение …………………………………………………………………………………………3

ГЛАВА I. Теоретические основы исследования …………………………………...…….........4

* 1. Понятия «правильный многогранник»…………………………………………………4
  2. История возникновения…………………………………………………………………4
  3. Виды и свойства…………………………………………………………………………5
  4. Многогранники вокруг нас……………………………………………………………..8

ГЛАВА II. Опытно – экспериментальное исследовательская работа по теме «Платоновы тела» ……..……………………………………………………………………...………………11

2.1. Проведение опроса на выявления уровня знаний……………………………………..11

2.2. Анализ опроса…………………………………………………………………………...12

2.3. Доказательства не существования 6 правильного многогранника…………………..17

Заключение……………………………………………………………………………………...18

Список литературы…………………………………………………………………………......19

**Введение**

**Актуальность** данного проекта состоит в том, что правильные многогранники – «вечные» тела. Интерес к ним тонкой нитью проходит через спираль всех времен.

**Цель проекта**: изучение свойства правильных многогранников, создание моделей Платоновых тел.

**Объект исследования**: раздел математики – геометрия.

**Предмет**: многогранники.

**Гипотеза:**  Если мы узнаем историю изучения многогранников, их классификацию, то сможем моделировать их на практике, находить в окружающем мире.

**Задачи**:

1. Анализ и синтез источников по данной теме,
2. Изучение видов многогранника,
3. Проведение социологического опроса,
4. Выявление доказательства не существования 6 правильного многогранника.
5. Обобщение результатов.

**Теоретические методы*:*** анализ и синтез научной литературы, обобщение результатов.

**Эмпирические методы исследования**: проведение социологического опроса, моделирование некоторых правильных многогранников, выявление не существования 6 правильного многогранника.

**Практическая значимость**: составление для социологического опроса, подготовка материала для моделирования правильного многогранника.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается логикой изложения исследовательской работы.

**ГЛАВА I. Теоретические основы исследования**

**1.1. Понятия «правильный многогранник»**

Многогранником называется трехмерное тело, граница которого состоит из многоугольников: например, куб, прямоугольный параллелепипед, пирамиды, призмы и др. Эти многоугольники называются гранями, стороны, по которым они соединяются друг с другом (один с другим) – ребрами; ребра начинаются и заканчиваются в вершинах.

Правильным многогранником называется такой многогранник, у которого все грани равны и представляют собой равные правильные многоугольники, все ребра и все вершины также равны между собой. В то время, как правильных многоугольников существует сколько угодно, правильных многогранников ограниченное число.

**1.2. История возникновения**

Правильные многогранники известны с древнейших времён. Их орнаментные модели можно найти на [резных каменных шарах](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D0%B7%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%88%D0%B0%D1%80%D1%8B), созданных в период позднего [неолита](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D1%82), в [Шотландии](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%BE%D1%82%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D0%B8%D1%8F), как минимум за 1000 лет до [Платона](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BD). В костях, которыми люди играли на заре цивилизации, уже угадываются формы правильных многогранников.

В значительной мере правильные многогранники были изучены [древними греками](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%86%D0%B8%D1%8F). Некоторые источники (такие как [Прокл Диадох](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%BA%D0%BB_%D0%94%D0%B8%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D1%85" \o "Прокл Диадох)) приписывают честь их открытия [Пифагору](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B8%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80). Другие утверждают, что ему были знакомы только тетраэдр, куб и додекаэдр, а честь открытия октаэдра и икосаэдра принадлежит [Теэтету Афинскому](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%8D%D1%82%D0%B5%D1%82_%D0%90%D1%84%D0%B8%D0%BD%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9" \o "Теэтет Афинский), современнику Платона. В любом случае, Теэтет дал математическое описание всем пяти правильным многогранникам и первое известное доказательство того, что их ровно пять.

Правильные многогранники характерны для философии [Платона](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BD), в честь которого и получили название «платоновы тела». Платон писал о них в своём трактате [Тимей](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%B9_(%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BD)" \o "Тимей (Платон)) (360г до н. э.), где сопоставил каждую из четырёх стихий (землю, воздух, воду и огонь) определённому правильному многограннику. Земля сопоставлялась кубу, воздух — октаэдру, вода — икосаэдру, а огонь — тетраэдру. Для возникновения данных ассоциаций были следующие причины: жар огня ощущается чётко и остро (как маленькие тетраэдры); воздух состоит из октаэдров: его мельчайшие компоненты настолько гладкие, что их с трудом можно почувствовать; вода выливается, если её взять в руку, как будто она сделана из множества маленьких шариков (к которым ближе всего икосаэдры); в противоположность воде, совершенно непохожие на шар кубики составляют землю, что служит причиной тому, что земля рассыпается в руках, в противоположность плавному току воды. По поводу пятого элемента, додекаэдра, Платон сделал смутное замечание: «…его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца». [Аристотель](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C) добавил пятый элемент — эфир и постулировал, что небеса сделаны из этого элемента, но он не сопоставлял его платоновскому пятому элементу.

[Евклид](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4) дал полное математическое описание правильных многогранников в последней, XIII книге [Начал](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%87%D0%B0%D0%BB%D0%B0_%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4%D0%B0). Предложения 13—17 этой книги описывают структуру тетраэдра, октаэдра, куба, икосаэдра и додекаэдра в данном порядке. Для каждого многогранника Евклид нашёл отношение диаметра описанной сферы к длине ребра. В 18-м предложении утверждается, что не существует других правильных многогранников. Андреас Шпейзер отстаивал точку зрения, что построение пяти правильных многогранников является главной целью дедуктивной системы геометрии в том виде, как та была создана греками и канонизирована в «Началах» Евклида. Большое количество информации XIII книги «Начал», возможно, взято из трудов Теэтета.

В XVI веке немецкий астроном [Иоганн Кеплер](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D0%BD%D0%BD_%D0%9A%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D1%80) пытался найти связь между пятью известными на тот момент планетами [Солнечной системы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B5%D1%87%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0) (исключая Землю) и правильными многогранниками. В книге «[Тайна мира](https://ru.wikipedia.org/wiki/Mysterium_Cosmographicum)», опубликованной в 1596 году, Кеплер изложил свою модель Солнечной системы. В ней пять правильных многогранников помещались один в другой и разделялись серией вписанных и описанных сфер. Каждая из шести сфер соответствовала одной из планет ([Меркурию](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%80%D0%BA%D1%83%D1%80%D0%B8%D0%B9_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B0)), [Венере](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B0)), [Земле](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D1%8F), [Марсу](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%81_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B0)), [Юпитеру](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AE%D0%BF%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B0)) и [Сатурну](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%BD_(%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B5%D1%82%D0%B0))). Многогранники были расположены в следующем порядке (от внутреннего к внешнему): октаэдр, за ним икосаэдр, додекаэдр, тетраэдр и, наконец, куб. Таким образом, структура Солнечной системы и отношения расстояний между планетами определялись правильными многогранниками. Позже от оригинальной идеи Кеплера пришлось отказаться, но результатом его поисков стало открытие двух законов орбитальной динамики — [законов Кеплера](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D1%8B_%D0%9A%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%B0), — изменивших курс физики и астрономии, а также правильных звёздчатых многогранников ([тел Кеплера — Пуансо](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BB%D0%BE_%D0%9A%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9F%D1%83%D0%B0%D0%BD%D1%81%D0%BE)).

**1.3. Виды и свойства**

*Тетраэдр и его свойства.*

[Тетраэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80) называется правильным, если все его грани — [равносторонние треугольники](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA).

У правильного тетраэдра все [двугранные углы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B2%D1%83%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB) при рёбрах и все [трёхгранные углы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB) при вершинах равны

Каждая его вершина является вершиной трех [равносторонних треугольников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA). А значит, сумма плоских углов при каждой вершине будет равна {\displaystyle \pi }.

В правильный тетраэдр можно вписать [октаэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BE%D0%BA%D1%82%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80), притом четыре из восьми граней октаэдра будут совмещены с серединными треугольниками четырёх граней тетраэдра, а все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести рёбер тетраэдра.

Правильный тетраэдр с ребром {\displaystyle x}состоит из одного вписанного октаэдра (в центре) с ребром {\displaystyle {\frac {x}{2}}} и четырёх тетраэдров (по вершинам) с ребром {\displaystyle {\frac {x}{2}}}.

Правильный тетраэдр можно вписать в [куб](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1), притом четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами куба, а все шесть рёбер тетраэдра будут совмещены с диагоналями граней куба.

*Гексаэдр и его свойства.{\displaystyle \arccos {\frac {1}{3}}\approx 70{,}53^{\circ }}*

Куб ([др.-греч.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B5%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) κύβος[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1#cite_note-1)) (иногда [гекса́эдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80" \o "Гексаэдр)[[2]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1#cite_note-2)[[3]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1#cite_note-3) или правильный гекса́эдр[[4]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1" \l "cite_note-4)[[5]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1#cite_note-5)) — [правильный многогранник](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA), каждая грань которого представляет собой [квадрат](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82). Частный случай [параллелепипеда](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BF%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D0%B4) и [призмы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%BC%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F)).

В различных дисциплинах используются значения термина, имеющие отношения к тем или иным свойствам геометрического прототипа. В частности, в [аналитике](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) ([OLAP](https://ru.wikipedia.org/wiki/OLAP)-анализ) применяются так называемые [аналитические многомерные кубы](https://ru.wikipedia.org/wiki/OLAP-%D0%BA%D1%83%D0%B1), позволяющие в наглядном виде сопоставить данные из различных таблиц.

Четыре сечения куба являются правильными шестиугольниками — эти сечения проходят через центр куба перпендикулярно четырём его главным диагоналям.

В куб можно вписать [тетраэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80) двумя способами. В обоих случаях четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами куба и все шесть рёбер тетраэдра будут принадлежать граням куба. В первом случае все вершины тетраэдра принадлежат граням трёхгранного угла, вершина которого совпадает с одной из вершин куба. Во втором случае попарно скрещивающиеся ребра тетраэдра принадлежат попарно противолежащим граням куба. Такой [тетраэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80) является правильным, а его объём составляет 1/3 от объёма куба.

В куб можно вписать [октаэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%82%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80), притом все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести граней куба.

Куб можно вписать в [октаэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%82%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80), притом все восемь вершин куба будут расположены в центрах восьми граней октаэдра.

В куб можно вписать [икосаэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80), при этом шесть взаимно параллельных рёбер икосаэдра будут расположены соответственно на шести гранях куба, остальные 24 ребра — внутри куба. Все двенадцать вершин икосаэдра будут лежать на шести гранях куба.

*Октаэдр и его свойства.*

Окта́эдр ([греч.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) οκτάεδρον от οκτώ «восемь» + έδρα «основание») — [многогранник](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA) с восемью гранями.

Пра́вильный окта́эдр является одним из пяти выпуклых [правильных многогранников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA)[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%82%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80#cite_note-1), так называемых [платоновых тел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D1%8B_%D1%82%D0%B5%D0%BB%D0%B0" \o "Платоновы тела); его [грани](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%8C) — восемь [равносторонних треугольников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA). Правильный октаэдр —

квадратная [бипирамида](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BF%D0%B8%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%B4%D0%B0" \o "Бипирамида) в любом из трёх [ортогональных](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C) направлений;

треугольная [антипризма](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BD%D1%82%D0%B8%D0%BF%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%BC%D0%B0" \o "Антипризма) в любом из четырёх направлений;

трёхмерный [шар](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D1%80) в [метрике городских кварталов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%81%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%8F%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B4%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85_%D0%BA%D0%B2%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B0%D0%BB%D0%BE%D0%B2).

Октаэдр — трёхмерный вариант более общего понятия [гипероктаэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%82%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80" \o "Гипероктаэдр).

*Додекаэдр и его свойства.*

Пра́вильный додека́эдр (от [др.-греч.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B5%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) δώδεκα — «двенадцать» и εδρον — «грань») — один из пяти возможных [правильных многогранников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA). Додекаэдр составлен из двенадцати [правильных пятиугольников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BF%D1%8F%D1%82%D0%B8%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA)[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B4%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80#cite_note-1), являющихся его гранями. Каждая [вершина](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA) додекаэдра является вершиной трёх правильных пятиугольников. Таким образом, додекаэдр имеет 12 граней (пятиугольных), 30 рёбер и 20 вершин (в каждой сходятся 3 ребра).

Все двадцать вершин додекаэдра лежат по пять в четырёх [параллельных плоскостях](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9), образуя в каждой из них правильный пятиугольник.

[Двугранный угол](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B2%D1%83%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB) между любыми двумя смежными гранями додекаэдра равен arccos(-1/√5)≈116°,565[[9]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B4%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80#cite_note-Dok-9).

Сумма плоских [углов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%B3%D0%BE%D0%BB) при каждой из 20 вершин равна 324°, [телесный (трёхгранный) угол](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D1%91%D1%85%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB) равен arccos(-11/5√5)≈2,9617 [стерадиан](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B4%D0%B8%D0%B0%D0%BD). В додекаэдр можно вписать [куб](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1) так, что стороны куба будут диагоналями додекаэдра.

Додекаэдр имеет три [звёздчатые формы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B2%D1%91%D0%B7%D0%B4%D1%87%D0%B0%D1%82%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA).

В додекаэдр можно вписать пять кубов. Если заменить пятиугольные грани додекаэдра плоскими пятиугольными звездами так, что исчезнут все ребра додекаэдра, то получим пространство пяти пересекающихся кубов. Додекаэдр как таковой исчезнет. Вместо замкнутого многогранника появится открытая геометрическая система пяти ортогональностей. Или симметричное пересечение пяти трехмерных пространств.

*Икосаэдр и его свойства.*

Икосаэдр (Название происходит от [др.-греч.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B5%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) εἴκοσι — двадцать и ἕδρα — площадка.[[1]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80#cite_note-_2a759426f3139d59-1)) — это [многогранник](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA) с 20 гранями.

Существует бесконечно много [непохожих](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D0%B5) икосаэдров, некоторые из которых имеют больше симметрий, другие меньше. Наиболее известен ([выпуклый](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D0%BF%D1%83%D0%BA%D0%BB%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA), [незвёздчатый](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B7%D0%B2%D1%91%D0%B7%D0%B4%D1%87%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%B9_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%8B" \o "Образование звёздчатой формы)) [правильный икосаэдр](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80) — один из [правильных многогранников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA), гранями которого являются 20 [правильных треугольников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA).

Имеется два тела, одно выпуклое и одно невыпуклое, оба из которых называются правильными икосаэдрами. Оба имеют 30 рёбер и 20 граней в виде [правильных треугольников](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%82%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA), которые сходятся по пять в каждой из его двенадцати вершин. Оба имеют [икосаэдральную симметрию](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F" \o "Икосаэдральная симметрия). Термин «правильный икосаэдр» обычно относится к выпуклому виду, а невыпуклая форма называется *большим икосаэдром*.

Сравнительная таблица многогранников.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Многогранник** | **Вершины** | **Грани** | **Ребра** |
| тетраэдр | 4 | 4 | 6 |
| куб | 8 | 6 | 12 |
| октаэдр | 6 | 8 | 12 |
| додекаэдр | 20 | 12 | 30 |
| Икосаэдр | 12 | 20 | 30 |

**1.4. Многогранники вокруг нас**

Правильные многогранники – самые выгодные фигуры, поэтому они широко распространены в природе. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами, монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана. Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра.

Правильные многогранники встречаются так же и в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феодарии по форме напоминает икосаэдр.

Большинство феодарий живут на морской глубине и часто служат добычей коралловых рыбок. Но это простейшее животное защищает себя двенадцатью иглами, которые выходят из 12 вершин скелета. Оно больше похоже на звёздчатый многогранник.

Пчелиные соты представляют собой пространственный паркет и заполняют пространство так, что не остается просветов. Как не согласиться с мнением пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»: «Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Эвклид мог бы поучиться, познавая геометрию сот».

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как это считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень – икосаэдр.

Впрочем, многогранники – отнюдь не только объект научных исследований. Их формы – завершенные и причудливые, широко используются в искусстве.

Титан Возрождения, живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452-1519) — символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его интерес к таким прекрасным, высоко симметричным объектам, как выпуклые многогранники вообще и усеченный икосаэдр в частности.

Знаменитый художник, увлекавшийся геометрией Альбрехт Дюрер (1471- 1528), в известной гравюре «Меланхолия» на переднем плане изобразил додекаэдр

Ярчайшим примером художественного изображения многогранников в XX веке являются, конечно, графические фантазии Маурица Корнилиса Эшера (1898-1972), голландского художника, родившегося в Леувардене. Мауриц Эшер в своих рисунках как бы открыл и интуитивно проиллюстрировал законы сочетания элементов симметрии, т.е. те законы, которые властвуют над кристаллами, определяя и их внешнюю форму, и их атомную структуру, и их физические свойства.

Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов.

На гравюре "Четыре тела" Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого многогранники выглядят полупрозрачными, и сквозь любой из них можно увидеть остальные.

Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в его работе "Порядок и хаос". В данном случае звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы. Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором.

Наиболее интересная работа Эшера - гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров.

С точки зрения формы архитектура всегда была преимущественно кубической. Изредка встречались и другие Платоновы тела, то есть призмы, конусы, пирамиды, сферы, но все же куб имел подавляющее преимущество. По сути дела куб лежал в основе любой архитектурной формы нескольких последних тысячелетий.

Примером применения в архитектуре других Платоновых тел может служить Великая пирамида в Гизе. Великая пирамида была построена как гробница Хуфу, известного грекам как Хеопс. Он был одним из фараонов, или царей древнего Египта, а его гробница была завершена в 2580 году до н.э. Позднее в Гизе было построено еще две пирамиды, для сына и внука Хуфу, а также меньшие по размерам пирамиды для их цариц. Она имеет форму правильного тетраэдра и является древнейшим из Семи чудес древности.

Также примером архитектурных сооружений с использованием многогранников является Фаросский маяк.

**ГЛАВА II. Опытно – экспериментальное исследовательская работа по теме «Платоновы тела»**

**2.1. Проведение опроса на выявления уровня знаний.**

Я провел опрос на выявления уровни знаний по теме «Платоновы тела». В опросе приняли участи школьники 9-11 классов из школ МБОУ СОШ №3, МБОУ СОШ №8, где учащиеся школ отвечали на 10 вопросов. Всего приняло участие 106 учеников (из МБОУ СОШ №3 приняли 76 учеников, а из МБОУ СОШ №8 приняли 30 школьников).

Вопросы опроса:

1. Знаете ли вы, что такое правильные многогранники?

Да

Нет

1. Сколько всего правильных многогранников?

2

4

5

6

1. Встречаются ли правильные многогранники в природе?

Да, встречаются

Нет, не встречаются

1. Треугольник является правильным многогранником?

Является

Не является

1. Куб – это правильный многогранник?

Да

Нет

1. Встречаются ли правильные многогранники в архитектуре?

Да

Нет

1. У какого многогранника 8 граней?

Додекаэдр

Октаэдр

Икосаэдр

1. Сколько вершин у тетраэдера?

4

5

6

1. Существует ли шестой правильный многогранник?

Да

Нет

1. В честь какого ученного назвали правильные многогранники?

Эйнштейна

Платона

Ньютона

**2.2. Анализ опроса**

Анализ опроса показала, что у многих школьников отсутствуют знания о правильном многограннике. Для увеличения уровня знаний по этой теме был создан буклет «Платоновы тела» и проведены дополнительные классные часы в МБОУ СОШ №3, которые могут посетить желающие увеличить уровень знаний в области геометрии.

**2.3. Доказательства не существования 6 правильного многогранника**

Выпуклый многогранник называется правильным, если**:**

1. все его грани — равные правильные многоугольники;

2. в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер;

3. сумма углов меньше или ровно 360°.

Доказательство.

1. У правильного n-угольника, если n≥6, углы больше или ровно 120°, а у правильных многогранников углы должны быть меньше 120°.

2. В каждой вершине многогранника должно быть не меньше трёх углов. Даже при трёх углах сумма всех углов уже достигает 360°.

3. Сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360°. Следовательно, не существует правильного многогранника, гранями которого являлись бы правильные n-угольники, если n≥6. Поэтому существует только 5 правильных многогранников.

Мы можем прийти к выводу, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные многоугольники, если число их сторон 6 или больше, то есть правильные n-угольники, если n≥6.

**Заключение**

В результате синтеза и анализа источников информации по данной теме мы изучили:

1. Виды и свойства правильных многогранников;
2. Их нахождение в природе;
3. Создали сравнительную таблицу;
4. Историю появления.

Так же мы провели опрос на выявления уровня знаний по теме «Платоновы тела», в следствии чего мы создали буклет с краткой информацией о Платоновых телах и провели дополнительные уроки на эту темя, для увеличения уровня знаний в области геометрии.

В ходе работы были созданы модели правильных многогранников и было доказанно, что не существует 6 правильного многогранника.

**Список литературы**

1. Смирнов Е. Ю.[Группы Кокстера и правильные многогранники](http://www.mccme.ru/dubna/2008/material.htm) // Летняя школа «Современная математика»*. — Дубна, 2008.*
2. *Weisstein, Eric W.* [Platonic Solids](http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolids.html) (англ.) на сайте Wolfram [MathWorld](https://ru.wikipedia.org/wiki/MathWorld" \o "MathWorld).
3. [Фанаты математики/геометрия](http://www.mathsisfun.com/geometry/).
4. [Бумажные модели правильных многогранников](http://www.korthalsaltes.com/)
5. [Наука/геометрия/платоновы и архимедовы тела](http://www.scienceu.com/geometry/facts/solids/)
6. [Платоновы, Архимедовы тела, призмы, тела Кеплера-Пуансо и усечённые тела Кеплера Пуансо](http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/background.html). (англ.)
7. [М. Веннинджер](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BD%D0%B4%D0%B6%D0%B5%D1%80,_%D0%9C%D0%B0%D0%B3%D0%BD%D1%83%D1%81). Модели многогранников. — Москва: Мир, 1974. — 236 с.
8. *Гончар В. В.* [Модели многогранников](http://jorigami.ru/Ori_book_shelfs/Joribook_1330_rus.htm). — Москва: Аким, 1997. — 64 с
9. *Гончар В. В., Гончар Д. Р*. [Модели многогранников](http://jorigami.ru/Ori_book_shelfs/Joribook_1810_rus.htm). — Ростов-на-Дону: Феникс, 2010. — 143 с.
10. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: МЦНМО, 2002. 2.
11. Бугаенко В. О. Правильные многогранники // Математическое просвещение. Третья серия.
12. Математическое просвещение. Третья серия. 2003. Вып. 7. С. 82––106. 4. Винберг Э.Б.