Программа курса «Вписанная и описанная окружности. Методика решения задач»

Пояснительная записка

Актуальность темы «Вписанная и описанная окружности» определяется её центральным местом в курсе планиметрии основной школы. Данный раздел завершает изучение свойств треугольников и четырехугольников, систематизирует знания о взаимном расположении прямой и окружности, формирует умение применять метрические соотношения при решении задач практического содержания. В контрольных измерительных материалах государственной итоговой аттестации задания на вписанные и описанные окружности присутствуют регулярно, причём часто вызывают у обучающихся затруднения из-за необходимости одновременного использования нескольких теорем и развитого пространственного воображения. Разработка программы отдельного курса или модуля по данной теме позволяет восполнить методический пробел, связанный с разрозненным изложением материала в базовых учебниках.

Цель программы — формирование у обучающихся системных знаний о свойствах вписанных и описанных окружностей, устойчивых навыков решения геометрических задач, развитие логического мышления и геометрической интуиции.

Задачи программы:

- повторить и обобщить теоретический материал о касательной к окружности, вписанных и центральных углах, вписанных и описанных многоугольниках;

- научить распознавать стандартные конфигурыации, связанные с вписанными и описанными окружностями;
- сформировать умение строить корректные чертежи и проводить доказательные рассуждения;
- развить навыки применения формул для радиусов вписанной и описанной окружности треугольника и четырёхугольника;
- подготовить обучающихся к решению задач повышенного уровня сложности на экзаменах.

Целевая аудитория: обучающиеся 8–9 классов общеобразовательных организаций, изучающие геометрию на базовом или углублённом уровне, а также учителя математики, реализующие факультативные занятия, элективные курсы или подготовку к олимпиадам. Материал может быть использован студентами педагогических вузов при прохождении педагогической практики.

Программа рассчитана на 12 учебных часов и может быть реализована в рамках внеурочной деятельности или дополнительных занятий по геометрии.

Содержание разработки

Методы обучения

Основой методики служит системно-деятельностный подход, предполагающий активное включение каждого обучающегося в процесс открытия геометрических фактов. Используются следующие методы:

- проблемный метод: перед объяснением нового свойства учитель ставит перед классом задачу, решение которой невозможно без введения нового понятия или теоремы. Например, предлагается найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами 10, 10 и 12,

после чего возникает необходимость в формуле площади через радиус описанной окружности;

- частично-поисковый метод: обучающиеся под руководством учителя анализируют готовый чертёж, выдвигают гипотезы о равенстве углов или отрезков, проверяют их с помощью измерений или логических рассуждений;
- наглядный метод: используется динамическая геометрическая среда или бумажные модели, позволяющие визуализировать положение центра вписанной и описанной окружности, наблюдать за изменением радиусов при изменении параметров многоугольника;
- практический метод: решение задач различного уровня сложности с обязательным построением чертежа от руки и с помощью инструментов.

Приёмы работы

Для эффективного усвоения материала применяются следующие приёмы:

- выделение ключевой конфигурыации: обучающимся предлагается набор чертежей, среди которых необходимо найти знакомые элементы — касательную, хорду, радиус, проведённый в точку касания, вписанный угол, центральный угол;
- приём «от обратного»: при доказательстве свойств вписанных четырёхугольников сначала рассматривается четырёхугольник, около которого описана окружность, а затем доказывается необходимое и достаточное условие;
- приём алгоритмизации: для каждого типа задач составляется пошаговый алгоритм, например, алгоритм нахождения радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника;
- приём сравнения: сопоставляются свойства вписанных и описанных четырёхугольников, выявляются сходства и различия;

- приём самостоятельного конструирования: обучающиеся придумывают собственные задачи на заданный чертёж или по заданным числовым данным.

Формы организации учебной работы

Формы работы варьируются в зависимости от этапа занятия:

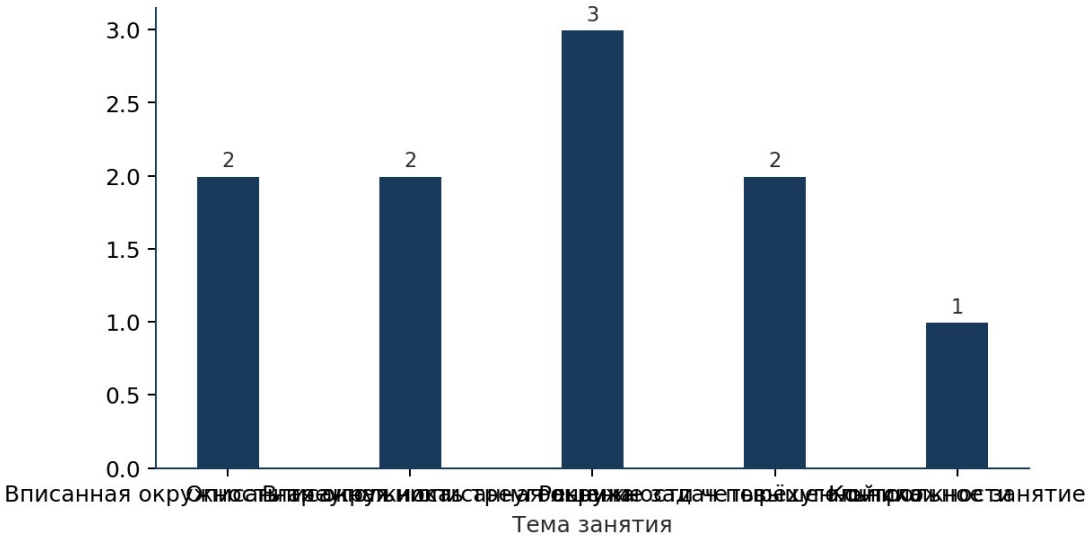
- - фронтальная беседа при актуализации знаний и подведение итогов;
- парная работа при взаимопроверке домашнего задания и решении тренировочных задач;
- групповая работа при выполнении мини-проектов, например, при доказательстве теорем о свойствах описанного четырёхугольника;
- индивидуальная работа с дифференцированными карточками при закреплении материала;
- практическая работа с использованием чертёжных инструментов и динамических моделей.

Дидактические материалы

Комплект материалов к курсу включает:

- таблицы с формулами радиусов вписанной и описанной окружности для треугольника и четырёхугольника;
- карточки с задачами трёх уровней сложности;
- презентации с анимацией построений;
- рабочие листы для самостоятельной работы;
- набор моделей многоугольников с нанесёнными окружностями;
- - интерактивные задания в среде динамической геометрии для демонстрации зависимости радиусов от параметров фигуры.

Примерное распределение часов



Тема занятия	Количество часов
Вписанная окружность треугольника	2
Описанная окружность треугольника	2
Вписанная и описанная окружности четырёхугольника	3
Решение задач повышенной сложности	2
Контрольное занятие	1

Таблица 1

Методика решения типовых задач

Рассмотрим подробную методику работы с несколькими базовыми задачами. Каждая задача сопровождается этапами решения и методическими комментариями.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 см и 8 см. Найдите радиус вписанной окружности и радиус описанной окружности.

Методический комментарий. Задача предназначена для первоначального закрепления формул. Перед решением необходимо повторить, что для любого

треугольника радиус вписанной окружности вычисляется по формуле r = S / p, где S — площадь, p — полупериметр. Для прямоугольного треугольника существует частная формула r = (a + b - c) / 2, где a и b — катеты, c — гипотенуза. Радиус описанной окружности для прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы.

Решение.

1. Находим гипотенузу по теореме Пифагора: c = корень из суммы квадратов катетов = корень из (36 + 64) = 10 см.
2. Вычисляем площадь треугольника: S = (6 · 8) / 2 = 24 кв. см.
3. Вычисляем полупериметр: p = (6 + 8 + 10) / 2 = 12 см.
4. Применяем общую формулу: r = S / p = 24 / 12 = 2 см.
5. Проверяем по частной формуле: r = (6 + 8 - 10) / 2 = 2 см. Результаты совпадают.
6. Радиус описанной окружности: R = c / 2 = 10 / 2 = 5 см.

Ответ: r = 2 см, R = 5 см.

На данном примере важно показать обучающимся, что частная формула не отменяет общую, а является её следствием. Полезно предложить доказать справедливость частной формулы для прямоугольного треугольника, используя свойство касательных, проведённых из одной точки.

Задача 2. В равнобедренную трапецию с основаниями 10 см и 20 см вписана окружность. Найдите радиус этой окружности, если боковая сторона трапеции равна 15 см.

Методический комментарий. Задача отрабатывает свойство описанного четырёхугольника: суммы противоположных сторон равны. Необходимо также вспомнить, что высота равнобедренной трапеции, проведённая из вершины

меньшего основания, отсекает на большем основании отрезок, равный полуразности оснований.

Решение.

7. Так как трапеция описанная, сумма оснований равна сумме боковых сторон: 10 + 20 = 2 · 15. Равенство выполняется, следовательно, окружность действительно вписана.
8. Диаметр вписанной окружности равен высоте трапеции. Найдём высоту.
9. Проведём высоту из вершины меньшего основания. Она разделит большее основание на отрезки 5 см и 15 см (полуразность оснований равна (20 - 10) / 2 = 5 см).
10. Рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной боковой стороне 15 см, и катетом 5 см. Второй катет — высота трапеции.
11. По теореме Пифагора высота h = корень из (15 в квадрате минус 5 в квадрате) = корень из (225 - 25) = корень из 200 = 10 корней из 2 см.
12. Радиус вписанной окружности равен половине высоты: r = h / 2 = 5 корней из 2 см.

Ответ: r = 5 корней из 2 см.

При решении важно заострить внимание на том, что условие существования вписанной окружности должно проверяться, а не приниматься как данность. В данной задаче равенство сумм сторон автоматически выполняется только для равнобедренной трапеции, если сумма оснований равна удвоенной боковой стороне.

Задача 3. Четырёхугольник ABCD описан около окружности. Известно, что AB = 5 см, BC = 7 см, CD = 9 см. Найдите сторону AD.

Методический комментарий. Задача предельно простая, но она формирует понимание свойства описанного четырёхугольника. Решение занимает

несколько секунд, поэтому полезно использовать её для устной работы в начале занятия.

Решение.

13. По свойству описанного четырёхугольника суммы длин противоположных сторон равны: AB + CD = BC + AD.
14. Подставляем известные значения: 5 + 9 = 7 + AD.
15. Отсюда AD = 14 - 7 = 7 см.

Ответ: AD = 7 см.

Далее целесообразно предложить обратную задачу: существует ли четырёхугольник со сторонами 3, 4, 5, 6, описанный около окружности? Обучающиеся должны проверить условие 3 + 5 = 4 + 6. Равенство не выполняется, значит, такой четырёхугольник описать нельзя.

Задача 4. В треугольнике ABC стороны равны 13, 14 и 15 см. Найдите радиус вписанной окружности и радиус описанной окружности.

Методический комментарий. Задача относится к повышенному уровню, так как требует применения формулы Герона и связи площади с радиусами. Рекомендуется решать её после повторения формулы Герона и выведения формул S = pr и S = abc / (4R).

Решение.

16. Полупериметр p = (13 + 14 + 15) / 2 = 21 см.
17. Площадь по формуле Герона: S = корень из произведения p(p - 13)(p - 14)(p - 15) = корень из (21 · 8 · 7 · 6) = корень из 7056 = 84 кв. см.
18. Радиус вписанной окружности r = S / p = 84 / 21 = 4 см.
19. Радиус описанной окружности R = abc / (4S) = (13 · 14 · 15) / (4 · 84) = 2730 / 336 = 8,125 см.

Ответ: r = 4 см, R = 8,125 см.

Полезно показать, что числа 13, 14, 15 образуют так называемый «геронов» треугольник, у которого площадь и радиусы выражаются целыми или рациональными числами. Это способствует развитию вычислительной культуры.

Задача 5. В четырёхугольнике ABCD сумма противоположных углов A и C равна 180 градусов, сумма углов B и D также равна 180 градусов. Докажите, что около четырёхугольника можно описать окружность.

Методический комментарий. Данная задача носит теоретический характер и формирует доказательные умения. Доказательство опирается на теорему о вписанном угле и на признак принадлежности четырёх точек одной окружности.

Решение.

20. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABD. Такая окружность существует и единственна.
21. Предположим, что точка C не лежит на этой окружности. Тогда возможны два случая: точка C находится внутри окружности или вне её.
22. В первом случае угол ACB равен половине дуги AB, увеличенной на некоторую величину, а во втором — уменьшенной. В любом случае сумма углов A и C не будет равна 180 градусам.
23. Так как по условию сумма углов A и C равна 180 градусам, предположение о том, что C не лежит на окружности, приводит к противоречию.
24. Следовательно, точка C лежит на той же окружности, что и точки A, B, D. Около четырёхугольника описана окружность.

Важно обратить внимание на корректность формулировки обратного утверждения: если четырёхугольник вписан, то суммы противоположных углов

равны 180 градусов. Данная задача доказывает достаточность этого условия, что завершает критерий.

Дифференциация заданий

Для организации индивидуальной работы разработаны три уровня карточек.

Первый уровень (базовый): задачи на прямое применение формул и свойств. Пример: найдите радиус окружности, описанной около квадрата со стороной 4 см; найдите сторону треугольника, если радиус вписанной окружности равен 3 см, а площадь — 36 кв. см.

Второй уровень (повышенный): задачи, требующие комбинирования теорем. Пример: в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см вписана окружность, найдите её радиус; около прямоугольной трапеции описана окружность, найдите её радиус, если основания трапеции равны 6 см и 10 см.

Третий уровень (олимпиадный): задачи на доказательство и нестандартные построения. Пример: докажите, что в любом вписанном четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея); постройте касательную к окружности, проходящую через точку вне окружности, используя только циркуль и линейку.

Методические рекомендации по использованию

Программа курса может быть реализована в нескольких форматах. В рамках общеобразовательной организации наиболее эффективен элективный курс продолжительностью 12 часов, проводимый один раз в неделю. При ограниченном времени возможно сокращение до 8 часов за счёт объединения

тем повторения и переноса задач повышенной сложности на самостоятельную работу.

Рекомендуется следующая структура занятия продолжительностью 45 минут:

- организационный этап и постановка цели (3 минуты);
- актуализация опорных знаний в форме фронтального опроса или математического диктанта (7 минут);
- изучение нового материала или разбор ключевой задачи (12 минут);
- самостоятельная работа обучающихся с дифференцированными карточками (15 минут);
- обсуждение результатов, выявление типичных ошибок (5 минут);
- подведение итогов и инструктаж по домашнему заданию (3 минуты).

При организации занятий необходимо уделять особое внимание построению чертежей. Обучающиеся должны выполнять чертежи карандашом с использованием линейки и циркуля, аккуратно отмечать равные элементы, подписывать вершины. Полезно требовать проговаривания каждого шага решения, что способствует формированию грамотной математической речи.

Для визуализации динамических свойств рекомендуется использовать интерактивную доску или программное обеспечение для динамической геометрии. Например, при изучении вписанной окружности треугольника можно продемонстрировать, как перемещение вершины треугольника изменяет положение центра вписанной окружности, но при этом центр всегда остаётся внутри треугольника и равноудалён от всех сторон. Это позволяет обучающимся самостоятельно сформулировать определение и свойство центра вписанной окружности.

Оценка результатов обучения проводится на основе накопительной системы. В течение курса обучающиеся выполняют три самостоятельные

работы по 15–20 минут, результаты которых фиксируются в диагностической карте. Итоговое контрольное занятие включает пять задач, охватывающих все ключевые типы: задачу на радиус вписанной окружности треугольника, задачу на радиус описанной окружности треугольника, задачу на свойство описанного четырёхугольника, задачу на свойство вписанного четырёхугольника и задачу на доказательство. Критерии оценивания заранее доводятся до сведения обучающихся.

Для успешной реализации курса учителю следует заранее подготовить раздаточный материал, проверить исправность чертёжных инструментов, продумать рассадку для групповой работы. Важно создать на занятиях атмосферу поиска, поощрять альтернативные способы решения, организовывать взаимопроверку.

Заключение

Реализация данной программы позволяет достичь значимых предметных и метапредметных результатов. Обучающиеся овладевают систематизированными знаниями о вписанных и описанных окружностях, приобретают устойчивый навык решения задач различного уровня сложности, развивают логическое мышление, пространственное воображение и умение проводить доказательные рассуждения. Опыт применения программы показывает, что систематическая работа по предложенной методике снижает количество ошибок на экзаменах, повышает мотивацию к изучению геометрии и способствует формированию культуры математической записи.

Перспективы развития данной разработки связаны с расширением блока задач на построение, включением тем о вневписанных окружностях, о связи вписанных и описанных окружностей с тригонометрическими соотношениями, а также с адаптацией материалов для дистанционного обучения с

использованием интерактивных геометрических сред. Возможна интеграция курса с темами стереометрии на уровне старшей школы, где свойства вписанных и описанных окружностей находят применение при решении задач о вписанных и описанных сферах и многогранниках.

Список литературы

- Атанасян, Л. С. Геометрия. 7–9 классы : учебник для общеобразовательных организаций / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. — Москва : Просвещение, 2023.
- Мерзляк, А. Г. Геометрия. 7–9 классы : учебник / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Москва : Вентана-Граф, 2022.
- Александров, А. Д. Геометрия. 7–9 классы : учебник / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — Москва : Просвещение, 2021.
- Смирнова, И. М. Геометрия. 7–9 классы : учебник / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — Москва : Мнемозина, 2021.
- Гаврилова, Н. Ф. Поурочные разработки по геометрии. 8 класс : пособие для учителя / Н. Ф. Гаврилова. — Москва : ВАКО, 2022.
- Зив, Б. Г. Дидактические материалы по геометрии. 8 класс / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер. — Москва : Просвещение, 2021.
- Ершова, А. П. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии. 8 класс / А. П. Ершова, В. В. Голобородько. — Москва : Илекса, 2022.