Методы решений уравнений решения уравнений.

Сборник посвящен задачам, которые для школьников считаются задачами повышенной трудности, требующим нестандартных методов решений. Приводятся методы решений уравнений основанные на свойствах функций. Автор ставит своей целью познакомить читателя с различными, основанными на материале программы общеобразовательной средней школы, методами решения, казалось бы трудных задач.

Пособие может оказать помощь при подготовке к экзаменам.

С о д е р ж а н и е.

1. Выделение полного квадрата.
2. Замена переменных.
3. Однородные уравнения
4. Уравнение вида (a*x+*b)4 + (a*x-*b)4 = c
5. Возвратные уравнения
6. Возвратные уравнения 4й степени
7. Использование суперпозиции функций
8. Mетод мажорант
9. Сведение решений иррациональных уравнений к решению тригонометрических уравнений.
10. Литература.

 Универсальные приемы решения уравнений

1. **Выделение полного квадрата.**

Данный прием основан на использовании свойств квадрата действительного числа:

 и , и также формул сокращенного умножения  и 

1. Решить ур-ние: *x*2 - 10*x* + 25 + *y*2 = 0

Представляем левую часть уравнения как сумму 2-х полных квадратов и воспользуемся ограниченностью каждого из них, перейдем от уравнения к системе:

*x*2 - 10*x* + 25 + *y*2 = 0 ⬄ (*x*-5)2 + *y*2 = 0 ⬄  ⬄ .

Ответ: (5;0)

 б) 

 Область определения: 



Ответ: -1,2.

**2) Замена переменных.**

**Этот** метод является одним из основных методов решения уравнений. Как правило, уравнение с помощью введения новых неизвестных сводится к более простым уравнениям, системам уравнений, системам уравнений и неравенств.

 а)

 Заметим, что 

  Поделим на  не является корнем уравнения.

 

 Заменим 

 

Ответ: 4;6;.

 б)

 Делим на  *x* = 0 не является корнем уравнения. Получим ;

Заменим ,получим уравнение относительно :

 

в)

Левая часть уравнения определена при всех значениях .Обозначим  и перепишем уравнение в виде Возведём в квадрат, и получим ; Это уравнение равносильно системе:

Рассмотрим второе уравнение системы:после преобразований получим:  Возвращаясь к переменной , получаем уравнение: .





,

,

,

, откуда , .

Проверим выполнение условия .

, , рассмотрим . Итак, .

Ответ: .

**Однородные уравнения**

Уравнения вида где  и- некоторые функции, называется однородным степени n.

Если , то и з уравнения следует, что и Если , то разделив обе части исходного уравнения на и обозначив  через y , получим уравнение относительно y: Таким образом, уравнение равносильно совокупности двух систем:

**Решить уравнение:**

а)**.**

Уравнение является однородным уравнением четвертой степени относительно двух многочленов  и . Проверим, есть ли среди корней уравнения  корни уравнения ,а следовательно и корни исходного уравнения. Решим систему

 Если , то разделив левую и правую части уравнения на получаем:

  Обозначим 

Получим систему  



 Уравнение  не имеет решений ( посторонний корень). Уравнение  имеет корень  ( 1-посторонний).Уравнение  имеет корень -4, и уравнение  имеет корень 0.

 Ответ: -4;0;;1.

б) 

Выполним замену (*x*+5)² = *t*, *x*² = *w*, имеем



т.е. исходное уравнение, являющееся однородным относительно (*x* + 5)² и *x*². Выполним деление на *w*²= *x*4 ** Получим квадратное уравнение



Ответ: .

|  |  |
| --- | --- |
| в)Поделимx²+*x*+10 при всех *x*. | Обозначим имеемРешим уравнение и .Ответ: 1. |

в) 



Разделим на log(2x-1)



Заменим 



Решим уравнения

 или .





Ответ: 

в) 



делим на 6x>0.



Заменим 



г).

 Полученное уравнение является однородным уравнением второго порядка. Поделим уравнение на :.Заменим получим квадратное уравнение , корни  - *посторонний*. Следовательно,

 .

*Ответ*: 2.

Уравнение вида (a*x+*b)4 + (a*x-*b)4 = c

После раскрытия скобок и приведения подобных членов сводится к биквадратному.

а) (*x*-3)4 + (*x*-5)4 = 82.

Заменим , получим

(*t*+1)4 + (*t*-1)4 = 82;

*t*4 + 4*t*3 + 6*t*² + *t* + 1 + *t*4 - 4*t*3 + 6*t*² - *t* + 1 = 82;

2*t*4 + 12*t*² + 2 = 82;

*t*4 + 6*t*² + 1 = 41;

*t*4 + 6*t*² - 40 = 0;



Возвратные уравнения

Пусть задано уравнение 4ой степени.

*a*4*x*4 + *a*3*x*3 + *a*2*x*2 + *a*1*x* + *a*0 = 0, где 

Если коэффициенты уравнения связаны соотношением *a*1 = λ2*a*4 (λили , то уравнение называется **возвратным** и после деления на *x*² и замены сводится квадратному.

Частным случаем возвратных уравнений является симметрическое (λ = 1) и кососимметрическое (λ = -1) уравнения.

 Одним из способов решения уравнений степени больше двух является приведение его к виду f(*x*) = 0 и разложение многочлена, стоящего в первой части, на множители, что позволяет свести решение исходного уравнения к решению совокупности нескольких уравнений меньших степеней.

Данный способ основан на следующем свойстве корней многочлена n – ой степени. Если число *с* является корнем многочлена F(*x*) = anxn+ *a*n-1xn-1*+ … + a*1 *x + a*0, то этот многочлен можно записать в виде F(*x*) *=* (*x – c*) G(*x*), где G(*x*) – многочлен степени *n*-1. Другими словами, многочлен F(*x*) делится на многочлен *x*–*c*.

 В общем случае для многочлена nой степени не существует универсального способа нахождения корней. Однако для многочлена с целыми коэффициентами существует теорема, облегчающая нахождение корней таких многочленов: рациональными корнями многочлена anxn+ *a*n-1xn-1*+ … + a*1 *x + a*0, где (*i* = 0, … *n*) могут быть лишь числа  (), причем *m* является делителем числа *a*n.

Решить уравнение:

.

Данное уравнение является симметрическим нечетной степени. Суммы коэффициентов при четных и нечетных степенях *x* такого уравнения равны, а значит один из корней

*x* = -1.

Выделим в левой части сомножитель *x*+1:



= 0 - симметрическое уравнение четной степени.

Делим на x³.



получим





*Ответ:*

*Пример – классическая задача с подсказкой.*

Решить уравнение 

Выделим такой же множитель в выражение *x*4*+*11*x*²+10:

*x*4*+*11*x*²+10+7*x*(*x*²+1) = 0



Возвратные уравнения 4й степени



т.к. x = 0 не является корнем уравнения, то разделим его на *x*² и сгруппируем его члены.



Пусть  тогда



|  |  |
| --- | --- |
| решений нет. |  |

*Ответ: *

Решить уравнение:



Перейдем к равносильной системе, получим:



Представим уравнение системы как квадратное относительно 5, получим



Решая его, находим



Условию  удовлетворяют два из найденных значений



*Ответ*: 

в)

Имеем возвратное уравнение четвертой степени.

Делим на 



|  |  |
| --- | --- |
|  |   *корней нет* |

*Ответ: *

Использование суперпозиции функций

Иногда можно найти корень уравнения, если заметить, что функция, находящаяся в одной из частей уравнения, является суперпозицией некоторых простых функций.

 **Решить уравнение**: **1 СПОСОБ**. 

Обозначим тогда уравнение можно записать в виде  .Ясно ,что корни уравнения  являются корнями исходного уравнения .То есть

если корень уравнения то корень уравнения 

Решим уравнение 

 

Исходное уравнение имеет эти корни. Преобразуем исходное уравнение:

 У полученного уравнения уже найдены два корня:3и2

разделим многочлен на то есть на трёхчлен «уголком» и найдем оставшиеся корни ,если они есть.



 -3x³ + 18x² - 33x

 -3x³ + !5x² - 18x

 3x² - 15x + 18

 3x² - 15x + 18

 0

<0.

Ответ: 2;3.

**2 СПОСОБ. Решим уравнение вторым способом.**



Обозначим .Тогда исходное уравнение будет равносильно системе 

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение:

 

Подставляя найденные значения *у* в первое уравнение системы, найдем *х*: 

 

**Mетод мажорант**

Мажорантой данной функции  на множестве P(или множества А чисел) называют такое число M, что либо для всех либо для всех 

Например, любое число, большее или равное 1 будет мажорантой для функций sinx и cosx на любом множестве.

**Основная идея метода мажорант** состоит в следующем:

Пусть требуется решить уравнение вида = и существует такое число М, что для любого Х из области определения  и  имеем  и . Тогда уравнение = равносильно системе Нет необходимости решать оба уравнения системы. Достаточно найти корни одного из уравнений и проверкой установить, являются ли они корнями второго уравнения, т .е. решениями системы.

Число М искать можно с помощью производной или если использовать следующие неравенства:

 при  и  при , равенство достигается при .

 при равенство достигается при a=b,при 

**Пример 1. 2 sinx=5x2+2x+3**

2 sinx2 – левая часть не превосходит двух.

5(x2+2+2+)= 5(x+)2+

Левая часть уравнения при любом  строго меньше правой, то решений нет.

Ответ: решений нет.

**Пример 2 sin13+cos8x=1**

 sin13xsin2x, cos8xcos2x

Сложим эти неравенства, получим для любого  sin13+cos8x sin2x+cos2x

sin13+cos8x1, причем равенство достигается, когда sin13x=sin2x и cos8x=cos2x.

Уравнение равносильно системе



 



Ответ: x=n, x=

**Пример 3. Решить уравнение log2((x-2)2+4)=2-sin25x**

(x-2)2+44,  log2((x-2)2+4)log24=2, sin25x 02-sin25x2

  x=2

Ответ:2.

**Пример 4. Найти все решения уравнения 4x3+3x2=6x-+sinx, лежащие на отрезке **

**Решение.** Перепишем уравнение в виде sinx=4x3+3x2-6x+. Найдем наименьшее значение функции, стоящей в правой части. D()=R



f(x) возрастает на отрезках , убывает на 

Наименьшее значение функция принимает в точке x= - , либо в точке x=

f(-

f(

Правая часть не меньше 1 на , причем равенство может достигаться при x=

Проверим sin

. Левая и правая часть при x= равна 1

Ответ: 

**Пример 5 .** Рассмотрим выражение и преобразуем его:

****

Уравнение приняло вид: .Оценим выражение в первой скобке с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, рассмотрев два случая.

а) Пусть  тогда ,

 , равенство достигается при ,

. Таким образом, левая часть уравнения не меньше . Равенство достигается, если .

Решим полученную систему. ()

Рассмотрим первую систему совокупности.

Второе уравнение разобьём на три серии: где  целые числа.

Получим совокупность из трёх систем: 

Первая и третья первой системы совокупности () решений не имеют, вторая имеет решение , s.

Рассмотрим вторую систему совокупности: .

Второе уравнение аналогично разобьём на три серии:, , , где q,r,g целые числа.Получим совокупность трех систем: 

Вторая система совокупности () имеет решение , .

Совокупность (\*) имеет решение:  где .

Б)Пусть , тогда .

Поскольку , то левая часть

, так что в этом случае решений нет.

 Ответ:  .

**Сведение решений иррациональных уравнений к решению тригонометрических уравнений.**

Ряд трудных алгебраических задач может быть решён с помощью так называемых тригонометрических подстановок, которые сводят решение алгебраической задачи к решению тригонометрической.

 Метод тригонометрической подстановки применяется при решении алгебраических задач (уравнений, систем, неравенств и т.д.), в которых появляются выражения, по своей структуре похожие на формулы тригонометрии.

 Выражение вида  встречается в тригонометрии, так устроена правая часть известной формулы . Поэтому естественно заменить  на . Сделать это можно, если  Наиболее распространены выражения *,*



При этом полезны следующие замены неизвестной.

1. Если в уравнение входит радикал , то можно сделать замену =sint или =cost.
2. Если в уравнение входит радикал , то можно сделать замену =tgt
3. Если в уравнение входит радикал , то можно сделать замену = 

**Пример1**: Решить уравнение:  Область определения уравнения: x. Сделаем замену неизвестной x=tgt, где

, тогда уравнение запишется в виде . Поскольку

cost для рассматриваемых t, то уравнение для этих t равносильно уравнению

 2-2sint=5(1-sin2t)

2(1-sint)=5(1-sint)(1+sint) , откуда



Промежутку принадлежит только t=arcsin(),

sint=-

Сделаем обратную замену:

x= tg(arcsin(-)) и вычислим значение *x*:

tg(arcsin(-))=

Ответ: -

**Пример2.** Решить уравнение :

Выделяя полные квадраты, преобразуем уравнение к виду . Введем переменную , тогда получим уравнение относительно t: .Оно определено при всех t , удовлетворяющих условию: . Сделаем замену , где , тогда уравнение примет вид:.

После упрощения : Применяя метод введения дополнительного аргумента , имеем:

 Найдем те значения , которые принадлежат промежутку .Таким значением является  Найдем .

Ответ: .

**Пример3** Решим уравнение:

Решение. Найдём область допустимых значений неизвестной: . . Каждому значению *x* из этого отрезка соответствует и притом только одно значение *t* из отрезка  такое, что .

Тогда для новой переменной:  но *t* меняется на отрезке , значит  



Отрезку  принадлежат три корня:  и . Исходное уравнение имеет три корня: , т.е.  

 

 

**Решим уравнение вторым способом (без использования тригонометрической подстановки).**

 

Решим уравнение системы, для этого введем новую переменную  :

 ,

Рациональный корень , тогда

  

  

Возвращаясь к неизвестной х, получим:

 , , ,

поэтому уравнение  имеет 6 корней ,-, , ,

, .

Неравенство  решаем методом интервалов: 

Неравенству системы удовлетворяют корни ,  

Ответ: , 

1. А.И.Азаров О.М.Гладун, Ю.А.Кремень,В.С.Федосеенко. Алгебраические уравнения и неравенства. Минск «Тривиум» 1997. стр.127.
2. С.Н.Олехник,М.К.Потапов,П.И. Пасиченко. Уравнения и неравенства . нестандартные методы решения.М.»Факториал»1997 . 217 стр.