

МБОУ «Средняя общеобразовательная школа №71»
Кемеровская область, г. Новокузнецк

Методика решения систем логических уравнений

Составитель:

Бобрешова Ирина Олеговна,
учитель информатики,
высшая категория

Новокузнецк

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Логика – наука о законах и формах мышления

Высказывание (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно

Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть

Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом

Умозаключение – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение

Логическое выражение – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)

Сложное логическое выражение – логическое выражение, составленное из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.

Логические операции и таблицы истинности

$F = A \& B$.

Логическое умножение КОНЪЮНКЦИЯ - это новое сложное выражение будет истинным только тогда, когда истинны оба исходных простых выражения. Конъюнкция определяет соединение двух логических выражений с помощью союза **И**.

	A	B	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0

это новое сложное тогда, когда выражений. логических

	A	B	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0

$F = A + B$

Логическое сложение – ДИЗЬЮНКЦИЯ - выражение будет истинным тогда и только истинно хотя бы одно из исходных (простых) Дизьюнкция определяет соединение двух выражений с помощью союза **ИЛИ**

	A	неA
1	1	0
1	0	1

Логическое отрицание : ИНВЕРСИЯ - если исходное выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное выражение ложно, то результат отрицания будет истинным/ Данная операция

означает, что к исходному логическому выражению добавляется частица **НЕ** или слова **НЕВЕРНО, ЧТО**

Логическое следование: ИМПЛИКАЦИЯ - связывает два

простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B)– следствием из этого условия. Результатом ИМПЛИКАЦИИ является ЛОЖЬ только тогда, когда условие A истинно, а следствие B ложно. Обозначается символом "следовательно" и выражается словами **ЕСЛИ ... , ТО**

...

	A	B	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1

	A	B	F
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Логическая равнозначность: ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ - определяет результат сравнения двух простых логических выражений A и B. Результатом ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ является новое логическое выражение, которое будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных выражения одновременно истинны или ложны. Обозначается символом "эквивалентности"

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении:

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. импликация
5. эквивалентность

Для изменения указанного порядка выполнения операций используются скобки.

Основные законы логики высказываний.

1. Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции:

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

$$a \wedge b \equiv b \wedge a$$
2. Дистрибутивный закон относительно дизъюнкции и конъюнкции:

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
3. Отрицание отрицания:

$$\neg(\neg a) \equiv a$$
4. Непротиворечивость:

$$a \wedge \neg a \equiv \text{false}$$
5. Исключающее третье:

$$a \vee \neg a \equiv \text{true}$$
6. Законы де-Моргана:

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$$

$$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$$
7. Упрощение:

$$a \wedge a \equiv a$$

$$a \vee a \equiv a$$

$$a \wedge \text{true} \equiv a$$

$$a \wedge \text{false} \equiv \text{false}$$

8. Поглощение:

$$a \wedge (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \wedge b) \equiv a$$

9. Замена импликации

$$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$$

10. Замена тождества

$$a \equiv b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$$

Представление логических функций

Любую логическую функцию от n переменных – $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно задать таблицей истинности.

Задачи ЕГЭ по информатике

Система логических уравнений (B23)

Пример 1.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) = 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) \wedge (y_5 \rightarrow y_6) = 1 \\ (\dot{y}_1 \vee x_1) \wedge (\dot{y}_2 \vee x_2) \wedge (\dot{y}_3 \vee x_3) \wedge (\dot{y}_4 \vee x_4) \wedge (\dot{y}_5 \vee x_5) \wedge (\dot{y}_6 \vee x_6) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Поскольку, 1 и 2 уравнения идентичны, найдем все решения уравнения 1:

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
					1
				1	1
			1	1	1
		1	1	1	1
	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Всего данное уравнение имеет 7 решений.

Так же и второе уравнение имеет 7 решений.

Два уравнения без третьего имеют $7 \cdot 7 = 49$ решений.

Составим таблицы решений уравнения 1 и 2:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Рассмотрим какие ограничения в решение системы наложит третье уравнение:

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) = 1 \\ (y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) \wedge (y_5 \rightarrow y_6) = 1 \\ (\dot{y}_1 \vee x_1) \wedge (\dot{y}_2 \vee x_2) \wedge (\dot{y}_3 \vee x_3) \wedge (\dot{y}_4 \vee x_4) \wedge (\dot{y}_5 \vee x_5) \wedge (\dot{y}_6 \vee x_6) = 1 \end{cases}$$

Возьмем первое решение $x_1..x_6$ и найдем какие решения $y_1..y_6$ соответствуют системе

Чтобы найти решение, мы складываем x_i и $ne(y_i)$, которые в сумме должны дать 1

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1



y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Получается только 1 решение системы

2 решение $x_1..x_6$:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1



y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Всего 2 решения системы

3 решение $x_1..x_6$:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

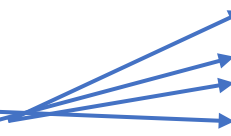


y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Всего 3 решения системы

4 решение $x_1..x_6$:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1



y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1

0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Всего 4 решения системы

0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

5 решение x1..x6:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Всего 5 решений системы

y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

6 решение x1..x6:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Всего 6 решений системы

y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

7 решение x1..x6:

X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Всего 7 решений системы

y1	y2	y3	y4	y5	y6
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Суммируем полученное количество решений:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Ответ: 28

Пример 2.

Сколько существует различных наборов значений логических переменных $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\begin{cases} (x_2 \rightarrow x_1) \wedge (x_3 \rightarrow x_2) \wedge (x_4 \rightarrow x_3) \wedge (x_5 \rightarrow x_4) = 1 \\ (y_2 \rightarrow y_1) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_3) \wedge (y_5 \rightarrow y_4) = 1 \\ (\dot{y}_1 \vee x_1) \wedge (\dot{y}_2 \vee x_2) \wedge (\dot{y}_3 \vee x_3) \wedge (\dot{y}_4 \vee x_4) \wedge (\dot{y}_5 \vee x_5) = 1 \end{cases}$$

Поскольку, 1 и 2 уравнения идентичны, найдем все решения уравнения 1:

$$(x_2 \rightarrow x_1) \wedge (x_3 \rightarrow x_2) \wedge (x_4 \rightarrow x_3) \wedge (x_5 \rightarrow x_4) = 1$$

X1	X2	X3	X4	X5
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
		1	0	0
			1	1
				0
	0	0	0	0

Всего данное уравнение имеет 6 решений.

Так же и второе уравнение имеет 6 решений.

Два уравнения без третьего имеют $6 \cdot 6 = 36$ решений.

Составим таблицы решений уравнений 1 и 2:


X1	X2	X3	X4	X5
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

y1	y2	y3	y4	y5
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Рассмотрим какие ограничения в решение системы наложит третье уравнение:



Возьмем первое решение $x_1..x_6$ и найдем какие решения $y_1..y_6$ соответствуют системе

Чтобы найти решение, мы складываем x_i и не(y_i), которые в сумме должны дать 1, если все суммы равны 1, то их произведение равно 1.

X1	X2	X3	X4	X5		y1	y2	y3	y4	y5
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
1	0	0	0	0		1	0	0	0	0
1	1	0	0	0		1	1	0	0	0
1	1	1	0	0		1	1	1	0	0
1	1	1	1	0		1	1	1	1	0
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1




Всего 1 решение системы

2 решение $x_1..x_6$

X1	X2	X3	X4	X5		y1	y2	y3	y4	y5
0	0	0	0	0	 	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0		1	0	0	0	0
1	1	0	0	0		1	1	0	0	0
1	1	1	0	0		1	1	1	0	0
1	1	1	1	0		1	1	1	1	0
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1





Всего 2 решения системы

3 решение $x_1..x_6$

X1	X2	X3	X4	X5		y1	y2	y3	y4	y5
0	0	0	0	0	  	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0		1	0	0	0	0
1	1	0	0	0		1	1	0	0	0
1	1	1	0	0		1	1	1	0	0
1	1	1	1	0		1	1	1	1	0
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1

Всего 3 решения системы

4 решение $x_1..x_6$

X1	X2	X3	X4	X5		y1	y2	y3	y4	y5
0	0	0	0	0	   	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0		1	0	0	0	0
1	1	0	0	0		1	1	0	0	0
1	1	1	0	0		1	1	1	0	0
1	1	1	1	0		1	1	1	1	0
1	1	1	1	1		1	1	1	1	1

1	1	1	1	1
---	---	---	---	---

Всего 4 решения системы

5 решение x1...x6

X1	X2	X3	X4	X5
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Всего 5 решений системы

6 решение x1...x6

X1	X2	X3	X4	X5
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Всего 6 решений системы

1	1	1	1	1
---	---	---	---	---

y1	y2	y3	y4	y5
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Суммируем полученное количество решений:

$$1+2 + 3 +4 + 5 +6 = 21$$

Ответ: 21

Задачи для самостоятельной работы:

1. Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

$$(y_2 \rightarrow y_1) \wedge (y_3 \rightarrow y_2) \wedge (y_4 \rightarrow y_3) \wedge (y_5 \rightarrow y_4) \wedge (y_6 \rightarrow y_5) = 1$$

$$y_1 \rightarrow x_2 = 1$$

где $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

(ответ: 19)

2. Сколько различных решений имеет система уравнений?

$$(x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_5) \wedge (x_5 \rightarrow x_6) = 1$$

$$(y_1 \rightarrow y_2) \wedge (y_2 \rightarrow y_3) \wedge (y_3 \rightarrow y_4) \wedge (y_4 \rightarrow y_5) \wedge (y_5 \rightarrow y_6) = 1$$

$$(z_1 \rightarrow z_2) \wedge (z_2 \rightarrow z_3) \wedge (z_3 \rightarrow z_4) \wedge (z_4 \rightarrow z_5) \wedge (z_5 \rightarrow z_6) = 1$$

$$x_6 \wedge y_6 \wedge z_6 = 0$$

где $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_6, z_1, z_2, \dots, z_6$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

(ответ: 127)