

Метод интервалов



Решение неравенств



МОУ СОШ с. Тунгор

Учащиеся: Руденко Дарья

Галюк Анна 11 класс

Учитель: Филонов Л.Н.



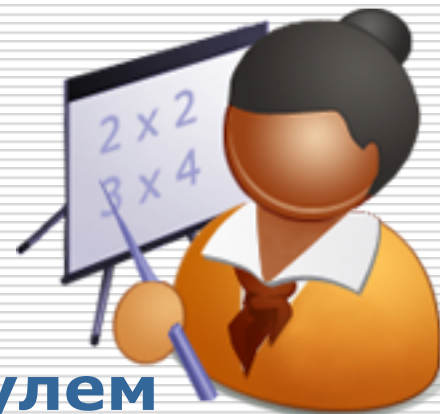
Цели и задачи доклада

- ☐ Углубленное изучение решения неравенств методом интервалов.
- ☐ Разработка и применение алгоритма решения неравенств различного вида с помощью метода интервалов для выполнения типовых заданий при подготовке к ЕГЭ
- ☐ Использование как учебное пособие при подготовке к итоговой аттестации



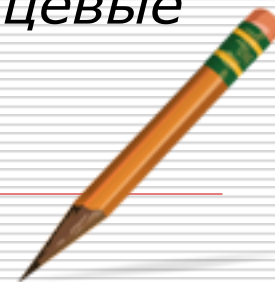
Неравенства. Понятие о методе интервалов (виды неравенств)

- ☐ **Линейные неравенства**
- ☐ **Квадратные неравенства**
- ☐ **Рациональные неравенства**
- ☐ **Иррациональные неравенства**
- ☐ **Простейшие неравенства с модулем**
- ☐ **Простейшие показательные неравенства**
- ☐ **Простейшие логарифмические неравенства**
- ☐ **Простейшие тригонометрические неравенства**



Метод интервалов – универсальный метод решения неравенств. Он позволяет найти решение практически для любого вида неравенств.

- ❑ **Метод интервалов** применяют для неравенств вида $f(x) > 0$, вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, \leq , \geq
- ❑ На числовой оси, внутри области допустимых значений, выделяют интервалы, на которых функция $f(x)$ имеет постоянный знак.
- ❑ Часто концевыми точками таких интервалов являются точки, в которых $f(x) = 0$ или не определена, т.е. задача о выделении интервалов знакопостоянства сводится в этом случае к решению соответствующих уравнений.
- ❑ Затем определяют знаки на этих интервалах, т.е. у каждого из получившихся интервалов ставят знак плюс или минус в зависимости от того какой знак имеет $f(x)$ на данном интервале, изучают концевые точки и выписывают ответ.



Одно из наиболее трудных этапов- разложение выражения на линейные множители.

- Вынесение общего множителя. **Группировка**
- Применение формул сокращенного умножения

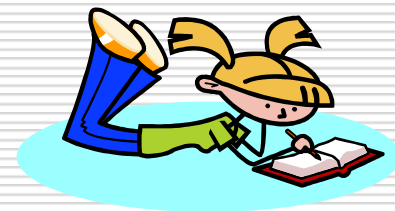
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3, \quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3,$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$



Правило расщепления

Неравенств
во

$$f(x)\varphi(x) \geq 0$$

равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq 0, \\ \varphi(x) \leq 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Неравенство

$$f(x)\varphi(x) \leq 0$$

равносильно совокупности систем



$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \leq 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Таким образом, при применении правила расщепления неравенств необходимо сначала аккуратно выписать все случаи, когда это неравенство справедливо, т.е. выписать совокупность соответствующих систем неравенств, а затем решить каждую из этих систем и объединить в ответе полученные множества решений.





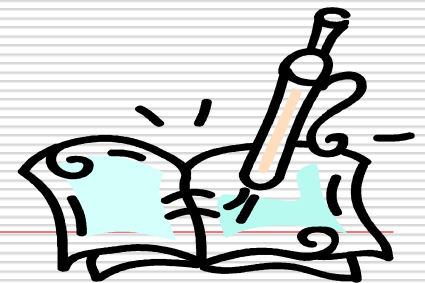
Линейные неравенства

Линейными

называются неравенства вида:

$$ax + b > 0, ax + b < 0$$

***решение данных неравенств можно
просмотреть как этап при решении
квадратных неравенств***



КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

- Квадратными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$



*$a(x - x_1)(x - x_2)$ в соответствии со
знаком произведения (– или +)
выбирается ответ*

Пример 1. Решите неравенство

$$-2x^2 - 3x + 5 \geq 0$$

Решение:



$$-2x^2 - 3x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 \leq 0$$

Найдем корни квадратного трехчлена

$$x_1 = -2,5 \quad x_2 = 1$$

Далее имеем рисунок № 4

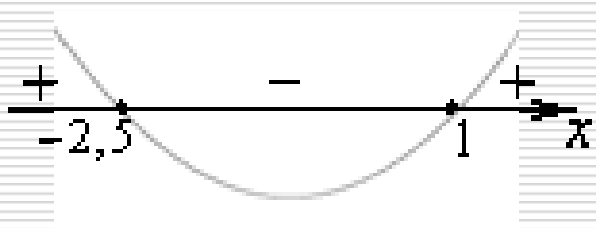


Рис.4

$$2x^2 + 3x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -2,5 \leq x \leq 1$$

Ответ:

$$[-2,5; 1]$$



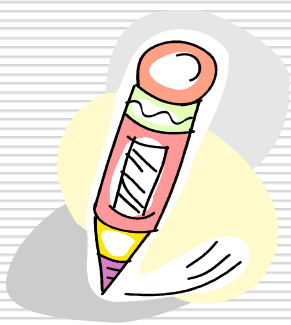
Сформулируем правило расстановки знаков при решении неравенств

вида

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0,$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

На координатную ось наносят числа x_1, x_2, \dots, x_n , которые разбивают её на интервалы знакопостоянства функции, стоящей в левой части неравенства. В промежутке справа от x_n ставят знак "+", затем, двигаясь справа налево, при переходе через точку x_i меняют знак, т.е. левее x_n ставят знак "-", затем "+" и т.д.



Множество решений неравенства будет объединение интервалов, в каждом из которых поставлен знак "+".

Аналогично может быть описано решение неравенств, в которых вместо знака $>$ стоят знаки $<$, \leq , \geq

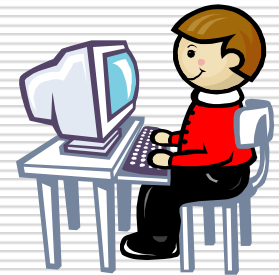
Иррациональные неравенства

Пример №2.

$$\sqrt{9x - 20} > x \quad (1)$$

Начнём с того, что определим Область Допустимых Значений (ОДЗ) переменной x . Ясно, что наличие квадратного корня в неравенстве даст условие:

$$9x - 20 \geq 0, \quad x \geq 20/9$$



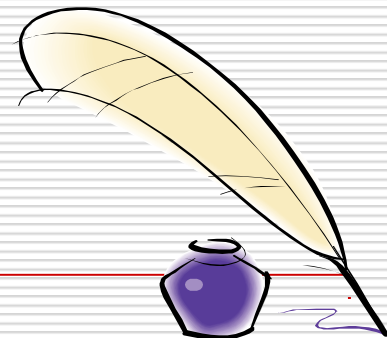
Теперь, решим уравнение:

$$\sqrt{9x - 20} = x \quad (2)$$

Корни, которого, равны: 4 и 5. Оба корня попадают в ОДЗ нашего неравенства



Заполним таблицу



x	$(20/9; 4)$	4	$(4; 5)$	5	$(5; \infty)$
$f(x)$	-	0	+	0	-
<i>Неравенство</i>	Не выпол- няется		Выпол- няется		Не выполняет- ся

Ответ: $4 < x < 5.$

Простейшие показательные неравенства

Пример 3

$$4^x < 2^{x+1} + 3$$

Решение

Пусть

$$y = 2^x.$$

Тогда после простейших преобразований получаем

$$y^2 - 2y - 3 < 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 3.$$

Откуда, возвращаясь к переменной x и логарифмируя, имеем:

$$2^x < 3 \Leftrightarrow x < \log_2 3.$$

Ответ:

$$x < \log_2 3.$$



Простейшие логарифмические неравенства

Пример 4. $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$

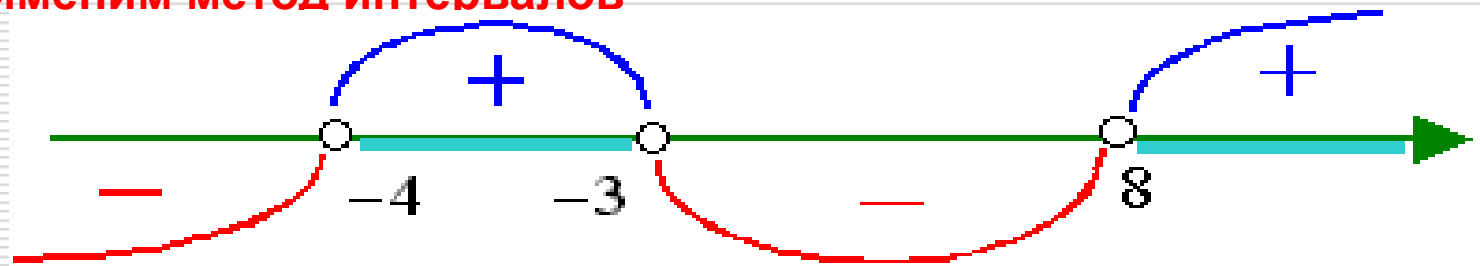
Решение :

$$\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < \log_{0,3} 1; \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \Leftrightarrow \frac{(x + 3)(x - 8)}{x + 4} > 0.$$



Применим метод интервалов



откуда

$$x \in (-4; -3) \cup (8; +\infty).$$

Простейшие неравенства с модулем

Пример 5

$$|x - 1| + |x + 1| < 4$$

Отметим на вещественной оси точки, в которых выражения под знаком модуля обращаются в нуль. Таким образом, выделяются интервалы знакопостоянства этих выражений.

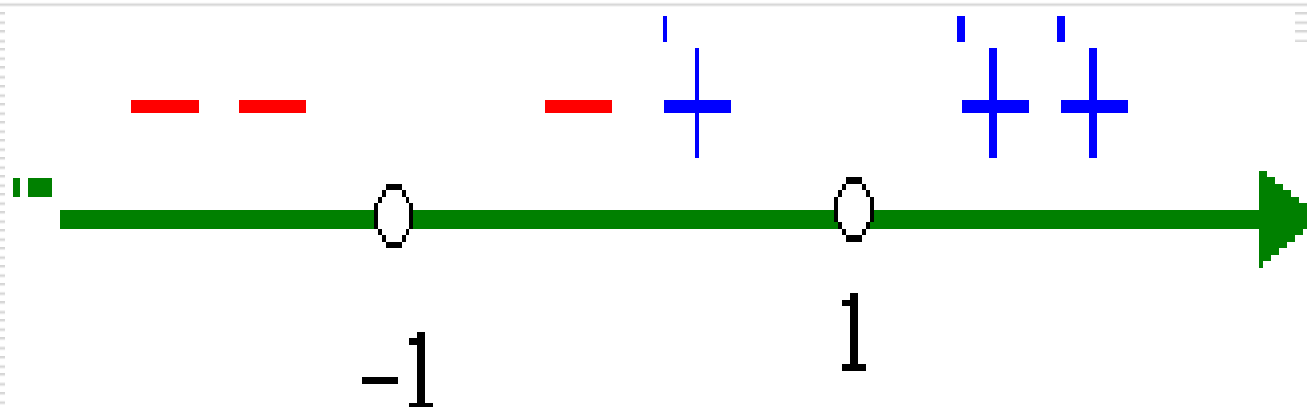


Тогда исходное неравенство равносильно совокупности систем:



$$\begin{cases} x \leq -1, \\ -x + 1 - x - 1 < 4; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 < x \leq 1, \\ -x + 1 + x + 1 < 4; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x - 1 + x + 1 < 4. \end{cases}$$

Откуда, решая эти системы,
получаем:



$$-2 < x \leq -1, \quad -1 < x \leq 1, \quad 1 < x < 2.$$

Объединяя полученные решения систем,
выписываем ответ.

$$x \in (-2; 2).$$





Выводы и предложения:

- ❑ Данная модель исследования способна решать обучающие задачи по теме «Метод интервалов»
- ❑ Данная тема настолько обширна, что возникает необходимость продолжать работу(например при изучении исследования функций на монотонность и экстремумы)



Выводы и предложения:



- ☐ **Использовать систематизированный материал как учебное пособие при подготовке к ЕГЭ.**
- ☐ **Предлагаемые домашние задания по пройденным разделам:**



Задачи для самостоятельного решения



Решить неравенства	Ответы
$\sqrt{x+78} < x+6$	$x \in (3; +\infty)$
$\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x+2} > 0$	$x \in (-2; 2)$
$\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leq 0,$	$x \in [1; 2).$
$3 \cdot 7^x + 5 - 2 \cdot 7^{-x} < 0,$	$x \in \left(-\infty; \log_7 \frac{1}{3}\right).$
$ x^2 + 5x + 2 \geq 2.$	$x \in (-\infty; -5] \cup [-4; -1] \cup [0; +\infty).$



ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!

Литература



- ❑ Агафонов Б.Г.Повторим математику. Издательство «Высшая школа» М.1968 г.
- ❑ Агалаков С.А. Математика Е.Г.Э.(часть «С».Омск-2004.
- ❑ Дорофеев Г.В. , М.К.Потапов. Пособие по математике «Нестандартные задачи». Издательство «Наука» М.1976 г.
- ❑ Далингер В.А. Нестандартные уравнения , неравенства и методы их решения.Омск-1995 г.
- ❑ Моденов В. П. Пособие для поступающих в вузы. Издательство «Наука» 1984 г.
- ❑ Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике М. «Просвещение» 1991 г.

