МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ СВЕРДЛОВСКОЙ ОБЛАСТИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ СВЕРДЛОВСКОЙ ОБЛАСТИ «КАМЫШЛОВСКИЙ ТЕХНИКУМ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ТРАНСПОРТА»

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К**

**ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

**ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»**

**Тема «Начало математического анализа»**

**«Понятие производной функции»**

для студентов специальности/профессии

13.01.10. «Электромонтер по ремонту и обслуживанию электрооборудования»,

23.02.06 «Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог»,

09.02.06. «Сетевое и системное администрирование»,

54.01.20. «Графический дизайнер»,

43.02.14. «Гостиничное дело»,

38.01.02. «Продавец, контролёр – кассир».

Составил:

преподаватель математика

Зуева О.С.

Камышлов

2020

**АННОТАЦИЯ**

Методическое пособие к выполнению самостоятельных и практических работ по учебной дисциплине «Математика» по теме «Начало математического анализа», «Понятие производной функции» предназначены для студентов специальности/профессии 13.01.10. «Электромонтер по ремонту и обслуживанию электрооборудования», 23.02.06 «Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог», 09.02.06. «Сетевое и системное администрирование», 54.01.20. «Графический дизайнер», 43.02.14. «Гостиничное дело», 38.01.02. «Продавец, контролёр – кассир».

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту учебной дисциплины «Математика», оно содержит рекомендации для студентов по освоению данной темы в рамках общеобразовательного цикла ОПОП.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по указанным профессиям/ специальностям.

В пособии рассматриваются базовая тема учебной дисциплины, знание которых необходимо для дальнейшего успешного усвоения программного материала.

По теме кратко излагаются теоретические основы, приводятся примеры решения стандартных задач, предлагаются индивидуальные задания для самостоятельной и практической работы.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| Аннотация  Введение   1. Основная часть   1.1 Числовая последовательность  1.2 Понятие о производной.  2. Задания для самостоятельной и практической работы    Заключение  Список литературы и источников | 2  4  5  5  10  13  14  14 |

**ВВЕДЕНИЕ**

Пособие разработано с целью оказания помощи студентам при изучении темы «Начало математического анализа», «Производная функции» . Нахождение производной функции и применение производной для решения задач – их знание необходимо для дальнейшего изучения математики.

Каждый пункт содержит необходимые теоретические сведения, примеры с решениями, задания для самостоятельной и практической работы, чтобы студенты имели представление об уровне стандартных требований.

Заканчивается каждый пункт вариантом самостоятельного задания.

Значительную часть заданий подробно рассматривается на уроках. После коллективного решения студентам предлагается выполнить самостоятельно некоторые задания с тем, чтобы студенты сами поняли, какие вопросы вызывают затруднения . Итогом работы будет выполнение студентами

индивидуальных заданий , которые обязательны для всех. Решения записываются в рабочую тетрадь , сдаются на проверку, оценки ставятся в журнал.

1. **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

**Тема Начало математического анализа.**

Целью является формирование базовых умений и навыков.

Рабочей программой по математике на изучение данной темы отводится 24 часа.

В пособии рассматриваются следующие темы:

· Числовые последовательности.

· Показательные неравенства.

- Решение задач с применением производной функции

При изучении весь теоретический материал рассматривается на уроках. Кроме этого, решаются типовые задачи.

* 1. **Числовые последовательности**.

**Полезная информация:** (прочитать)

Математика создает инструменты, которые помогают описывать и структурировать различные вещи, которые нас окружают. Одним из таких инструментов является числовая последовательность.

Само слово «последовательность» мы часто используем в обычной жизни. Чем последовательность отличается от произвольного набора? Тем, что в последовательности важен порядок ее элементов.

Мы будем изучать **числовые последовательности**, т. е. последовательности, элементами которых являются числа.

Номер телефона можно считать числовой последовательностью: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337477/62770d79320e007cd673f17bf9252b05.png. Пин-код кредитной карты или телефона тоже примеры числовых последовательностей: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337479/5da58d1809fcbf4a06636a582447bf16.png.

Приведенные выше примеры числовых последовательностей – это **конечные последовательности**, ведь они содержат конечное количество элементов. Могут быть и **бесконечные последовательности**. Ряд натуральных чисел – это простейший пример бесконечной числовой последовательности:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337481/29899df5081e738ee1a88717b486e871.png

Поскольку одна из функций натуральных чисел – это задание порядка, то логично, что именно натуральные числа мы будем использовать для нумерации других последовательностей.

Например, последовательность простых чисел:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337483/5d467fef1d48a7af3c4a9d90b6318873.png

**Теоретический материал**

1*.Аналитический способ задания последовательности*:

Задание последовательности с помощью формулы – называется аналитическим способом задания последовательности.

Пример: последовательность задана формулой https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337527/1ea928b34749b642367f0cef7f9b85a7.png, следовательно решение будет следующим https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337529/03662f57fa97a3fb7f2ee6da49f991c5.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337531/803ca1e11cf92e4ab91e0a6b77c2dcb4.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337533/19f36859d0015d4057e533a288a0008c.png и так далее.

Последовательность 2,4,6,8,10………

2. Возрастающая и убывающая последовательности

**Возрастающая последовательность** – это последовательность, у которой каждый член больше предыдущего: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337585/b8123c8288e4e153041876e6bda8707d.png

**Убывающая последовательность** – это последовательность, у которой каждый член меньше предыдущего: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337587/02a88add1e2ff11e1427645d7dffcbac.png

**Задание 1.**Найти первый отрицательный член последовательности: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337589/c78d5a7202b34a4420ea4d3854290fa0.png

*Решение.*

Член последовательности должен быть отрицательным: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337591/c4e3ee95346305e6de903d51c06d5de9.png

Решаем неравенство: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337593/068a427890396d810dafb094c0ed428a.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337595/42b48c1c464129142b387ab4e32e5f42.png

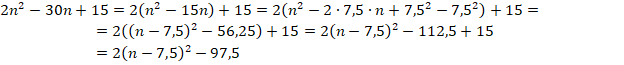
Переменная https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337523/ce86c9a98108e524a0c8a0b0bff1f8bb.png– это номер члена последовательности, т. е. натуральное число. Нужно найти первый отрицательный член последовательности, т. е. его номер должен быть наименьшим натуральным числом, которое больше https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337597/f9d87c48f23c90e1f108441552471081.png. Это число https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337599/c401ea3acb1a083e638cc2dde59a425f.png, тогда: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337601/cbd264b53867158728ef1df09b94b443.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337603/ef4a5735487e7d416221d95fddb538d4.png.

**Задание 2.**Найти номер наименьшего члена последовательности: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337605/8619da07f85575f7b31bae72c08a4431.png

*Решение.*

Чтобы найти наименьшее значение выражения, выделим полный квадрат:



Перепишем последовательность: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337608/4f6b6a199b794fb9d0e3e59c18a406f1.png

Т. к. https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337610/01a9a0ac826ca81afe2cdb5bd701ce17.png, то: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337612/b3d11ff3babbca724243dcc9e2793a0e.png

Т. е. минимально возможное значение https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337521/915aa58e56ad09d56ed6ba67da4b3b44.png равно https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337614/5e6e47df0ecf82c94f0715425c25ed58.png. Но достигается оно при https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337616/5856a8cc5dca606f95614b9f184749e1.png, а https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337523/ce86c9a98108e524a0c8a0b0bff1f8bb.png должно быть натуральным числом. Таким образом, член последовательности будет наименьшим при ближайших натуральных значениях https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337523/ce86c9a98108e524a0c8a0b0bff1f8bb.png: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337618/9954c758b75656d7fe123564101ef59c.png, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337620/5e939bb043e5cfcf3587186cc50eb2ba.png

Проверим: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337622/bdc06e9a0267b8940a9747931ed192a7.png https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337624/96d182896a9343d5d8b726ed735af0fc.png

Получили одинаковые значения, именно они и будут наименьшими.

Ответ: 7;8.

3. Рекуррентный способ задания последовательности.

Можно задать один или несколько первых членов последовательности и правило, по которому следует искать последующие члены. Например, первый член последовательности равен единице, каждый следующий равен квадрату предыдущего плюс «1». Записать мы это можем так:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337628/80cc0ec0a2fd37b7b1f230d745b752dc.png; https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337630/4b391a0bbd2120624f1bb233833e98c7.png

Действительно, для n-го члена последовательности предыдущим является https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337632/46fe176a7442637ce664182a7e9134aa.png-й.

Такой **способ задания последовательности**(следующий член через один или несколько предыдущих) называется **рекуррентным**.

**Полезная информация:** (прочитать)

**Рекурсия и фракталы**

**Рекурсия** – это определение объекта через себя.

Одним из самых известных примеров рекурсии в литературе является стихотворение: «У попа была собака…». В информатике рекурсивной называется функция или процедура, которая вызывает сама себя. Поэтому **способ задания** следующих членов последовательности через предыдущие называется **рекуррентным**.

Еще один пример самоподобного математического объекта – это фрактал. Определение фрактала можно сформулировать так: **фрактал** – это множество, обладающее свойством самоподобия (объект, в точности или приближенно совпадающий с частью себя самого, т. е. целое имеет ту же форму, что и одна или более частей).

Один из самых простых примеров фрактала – снежинка Коха. На отрезке добавим два отрезка следующим образом (см. рис. 1):



Рис. 1. На отрезке добавили два отрезка

Затем на каждом из получившихся отрезков снова добавим по два отрезка и т. д. В результате получится такая кривая (см. рис. 2):

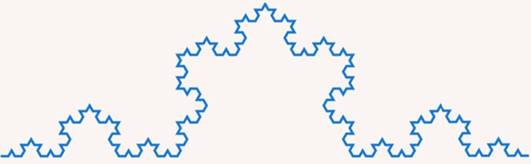


Рис. 2. Снежинка Коха

Существуют и гораздо более сложные и красивые фрактальные множества (см. рис. 3).

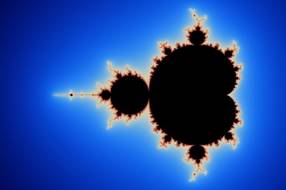


Рис. 3. Пример более сложного фрактала

При этом примеры фракталов можно встретить как в живой природе, так и в неживой: береговая линия, морозные узоры и т. д. (см. рис. 4).

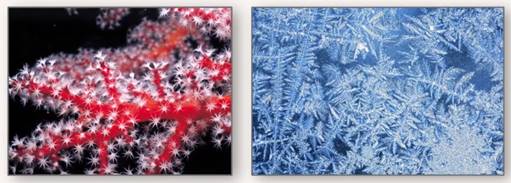


Рис. 4. Пример фракталов в живой и неживой природе

Теоретическая информация (конспект)

Наиболее известная рекуррентная последовательность – это **последовательность чисел Фибоначчи**. В ней первые два члена равны 1, каждый следующий равен сумме двух предыдущих:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337628/80cc0ec0a2fd37b7b1f230d745b752dc.png ; https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337644/e07aa2215b546596d2ee0a3ed57decef.png; https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337646/99c03155572e57c31c48adc7fcc14055.png ……..

Последовательность Фибоначчии: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …..

Начиная с третьего члена последовательно – это сумма двух предыдущих

1+2 = 3; 2+3=5; 3+5=8; 5+8= 13 и т.д.

**Задание 3.**Найти все члены последовательности Фибоначчи, не превышающие 20.

*Решение.*

Первые два члена последовательности Фибоначчи:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337628/80cc0ec0a2fd37b7b1f230d745b752dc.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337644/e07aa2215b546596d2ee0a3ed57decef.png

Ищем остальные члены, используя рекуррентную формулу:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337650/7edec160f3dd65d4cd54e5dbe003b2d5.png

Тогда:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337652/8bce32262ddc6c94e1e079b61f2c07ff.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337654/e06acc7a18a5d53265d2d937f16c8d11.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337657/08a4cbcfedf3967b08daf89b067bc87f.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337659/196ed9f77f4f46e74a5540ab9a2f20d9.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337661/452057855b0fe3283956688a8aa3bfa4.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337663/fa83c8a18dadbe29eafdda7d32827eef.png

8-й член уже больше 20, все последующие будут также больше 20, поскольку последовательность, очевидно, возрастающая.

Ответ: 1;1;2;3;5;8;13.

**Полезная информация:** (прочитать)

Факт о числах Фибоначчи, который не подлежит сомнению – следующее отношение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337686/506e8eba3124dd933b2726f4481367e4.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337688/f333fbe67303f26876cdfa2c5d3da0b6.png

Это число называется **золотым сечением**.

Исторически изначально золотым сечением именовалось деление отрезка на две неравные части так, что меньшая часть относится к большей как большая ко всему отрезку (см. рис. ):

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337690/b5a00e845a55df2accff2c65ef4a43e2.png 

Рис. . Деление отрезка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337694/1aac9dc4985f7d7713f15e999ca7350b.png на две неравные части так, что меньшая часть https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337696/44f4204d776469984d99c734308a9a08.png относится к большей части https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337698/2884ca3eb8a4d647954068f5fc420af9.png как большая часть https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337698/2884ca3eb8a4d647954068f5fc420af9.png ко всему отрезку https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337694/1aac9dc4985f7d7713f15e999ca7350b.png.



Рис. Пример золотого сечения в живой природе

**Теоретическая часть**

4. Арифметическая прогрессия

Вернемся к ряду натуральных чисел:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337704/6ae131a0463b3c03aa2ad52fa411ba18.png

По сути, его тоже можно задать рекуррентным соотношением. Первый член последовательности равен 1, каждый последующий – на единицу больше:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337706/b4123bcd2ca4acbb2c0ae37f84823ae9.png

А что, если будем прибавлять не 1, а 2? Получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337708/419c3d20aaca28ce9013839b20b4acad.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337710/0d4e3a23e215f267d8f8a7f802990f9e.png

Или начнем не с 1, а с 5 и будем прибавлять по 7? Получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337714/0ffab095276e5b2b49228bd9615a0622.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337716/08c087095512b3753709427c17f21e34.png

Все эти последовательности обладают одной особенностью: каждый следующий член последовательности отличается от предыдущего на одно и то же число.

Такие **последовательности**, поскольку они часто встречаются, имеют отдельное название – **арифметическая прогрессия**.

**Например,** так называемые «простые проценты». Если банк начисляет вам каждый год https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337718/6021824a4a9e95f5d446cb7006694b0b.png, но только на сумму первоначального вклада (к примеру, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337720/e2e4de2a911feffe7174101d3fa277e3.png рублей), то через год на счету будет https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337722/5ff3225427b22408fff0c5fb148ae7aa.png рублей, через https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337485/7257822b3bd22016faf268bc85203dc6.png – https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337724/cf33b1b683d32991339cab45043aec64.png, через https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337487/5011bcffd15c02457d957d761a179a4d.png – https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337726/7d7e73901102bffe818157dd7b624d00.png и т. д.

Для задания арифметической прогрессии нужно указать **первый член**https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337729/063a15a32953ff295da6f2c69550da4e.png и число, которое мы прибавляем. Это **число** принято называть **разностью арифметической прогрессии** и обозначать буквой https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337730/374c38f858f15359ee3d1379345c3d72.png. Тогда в общем виде арифметическая прогрессия задается как:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337733/e76dad7fe27606da9eb6cda16184347b.png

Почему «разность арифметической прогрессии»? Да потому что разность между двумя соседними членами арифметической прогрессии всегда равна https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337735/2db6255a993ddfea1a2b79fdaff3a5f9.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337737/9f842a042b4f8a11e7421ee8800a69a2.png

**Например:** https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337714/0ffab095276e5b2b49228bd9615a0622.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337716/08c087095512b3753709427c17f21e34.png(разность между последующим числом и предыдущим – это число «7»)

5. Геометрическая прогрессия

Последовательность, в которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на одно и то же ненулевое число, называется **геометрической прогрессией**. О названии, опять же, чуть позже.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, нужно задать **первый член последовательности**https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337757/1b83708cf3c076d0d85cc61d5165564a.png и число https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337759/f883448fa37b2aca2143391c00c7c87f.png, на которое будем умножать. Получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337761/46e345ad72a1f5e7d3da9947243bb28e.png

**Число**https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337763/77e02912b072eb0e3c8521f82014b7a5.pngназывают **знаменателем геометрической прогрессии**, поскольку это частное соседних членов прогрессии:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337765/474e3aedd8387039ce7be922b5d0a018.png

Теперь мы можем сказать, почему прогрессия называется геометрической.

Рассмотрим три последовательных члена этой прогрессии:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337767/4a9a11d7fc5473aea6284c9687467fa1.png

Мы знаем, что:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337769/1223f14863e42596f07c7b4523124a2e.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337771/78ba41de02e656f256b422de6a6bbf83.png

Тогда:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337773/e12ab21391848d214a111f82088d6598.png

Или, если мы рассмотрим прогрессию из положительных членов (https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337775/1ac431661fd99a38f9096266a8e44485.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337777/a868545697a8013015b00448767a9898.png

Т. е. любой член прогрессии является средним геометрическим своих соседей. Отсюда и название – геометрическая прогрессия.

**Полезная информация**

**Среднее геометрическое**

Почему средним геометрическим двух положительных чисел называется квадратный корень из их произведения? Это название связано со свойствами прямоугольных треугольников. Как мы знаем, высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу (см. рис. 18), равна среднему геометрическому проекций катетов, а каждый катет равен среднему геометрическому между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337779/7613085cfd9c3278976e7510e75856ad.png https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337780/f10c774c13b0d90d778e2bd28cb01d0b.png https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337782/b3e54be1922ce43a30a8301411efe6e4.png

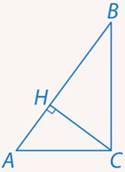


Рис. 18. Прямоугольный треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337787/544540c087abc8d860542363a51a5ff0.png с высотой https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337789/1c1c107d12ac3ccdbe26af3e57a64807.png, проведенной к гипотенузе https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337696/44f4204d776469984d99c734308a9a08.png.

* 1. **Понятие о производной**

**Историческая справка.** (прочитать)

Понятие «производная» возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики.

Великий французский математик Пьер Ферма в 1629 г. Научился находить касательные к алгебраическим прямым.

В 1638г Ферма поделился этим открытием со своим земляком Рене Декартом, который тоже занимался этой проблемой и нашел свой метод построения касательных к алгебраическим кривым.

Ферма далеко продвинулся в применении дифференциальных методов. Он использовал их не только для проведения касательных, но, к примеру, для нахождения максимумов, вычисления площадей.

Однако ни Ферма, ни Декарт не сумели свести полученные научные выводы и результаты в единую систему. Тем не менее, выдвинутые идеи не пропали впустую. Многие из них легли в основу нового метода математического анализа – дифференциального исчисления.

«Дифференциальное исчисление – это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники».

Основоположниками этого метода считаются Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716) и Исаак Ньютон (1642 – 1727).

Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат, которым мы и пользуемся в настоящее время.

И. Ньютон в основном опирался на физическое представление о мгновенной скорости движения, а Г. Лейбниц использовал понятие бесконечно малой.

С помощью дифференциального исчисления был решен целый ряд задач теоретической механики, физики и астрономии. В частности, ученые предсказали возвращение кометы Галлея, что было большим триумфом науки XVII века.

Очень многие великие ученые внесли свой вклад в зарождение и развитие дифференциального исчисления. Среди них – Джеймс Грегори, Якоб Бернулли, Гийом Франсуа Лопиталь, Леонард Эйлер, Карл Фридрих Гаусс, Жозеф Луи Лагранж, который в 1797 г. ввел термин «производная» и современные обозначения y´, f´.

В настоящее время понятие производной находит большое применение в логистике и коммерческой деятельности. Умение применять производную к исследованию функции – важный элемент математической культуры.

**Теоретический материал**

Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют **приращением аргумента**(при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют **приращением функции**.

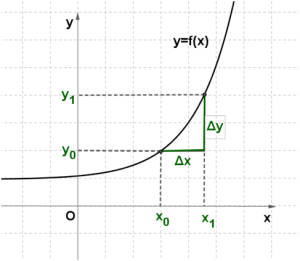
**Определение.**Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/ba0ca863-1301-4dbb-b8bd-bf84783a8d43.png

**Теоретический материал**

Изучая поведение функции y=f(x) около конкретной точки x0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют **приращением аргумента**(при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют **приращением функции**.



Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита "дельта"; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, x1-x0=Δx, значит, x1=x0+Δx.

f(x1)-f(x0)=Δy, значит,  **Δy=f(x0+Δx)-f(x0). (1)**

**Примеры и разбор решения заданий**

**Пример 1.**

Найдем приращение Δx и Δf в точке x0,если f(x)= x2, x0=2 и х=1,9

Решение: Δx= x1−x0=1,9-2=-0,1 Δf= f(1,9) –f(2)=1,92-22=-0,39

Ответ: Δx=-0,1; Δf =-0,39

**Пример 3.**

Найдем приращение Δf функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/9eb6609e-a32a-43b9-b835-1b298f3fc29e.png в точке x0,если приращение аргумента равно x0.

**Решение:**

по формуле (1) находим: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8e58e60e-39bd-401f-a84d-9876402d470a.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/50acb4a3-8339-4a2f-9783-08b443edabb3.png.

С помощью введенных обозначений приращений удобно также выражать среднюю скорость движения за промежуток времени [t0; t0+∆t]. Если точка движется по прямой и известна ее координата x(t), то

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8f40c2e4-1cc1-4b53-b0d4-84eebc4f1bdb.png

*Эта формула верна и для ∆t<0 (для промежутка [t0+∆t; t0]).*

Аналогично выражение https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/900fc1f0-d8ef-4bd4-b98e-2fb224a42a77.png называют средней скорость изменения функции на промежутке с концами х0 и х0+∆х.

**Определение.**Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/6068eca4-9b07-44a7-b838-037e87a394ab.png

Обозначение: **y’ или f ’(x)**

Если функция f(x) имеет производную в точке х, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Физический смысл производной: если положение точки при её движении задаётся функцией пути S(t), где t – время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t: v(t)=S’(t).

Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени.

**Пример 5.**

Точка движется по закону s(t)=1-2t. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени от t=0,8 до t=1.

Решение: найдем ∆t= 1-0,8=0,2 S(0,8)= 1-2·0,8= -0,6=S(t) S(1)= 1-2·1= -1=S(t+∆t)

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/0e221375-1c73-4a13-923e-7319161ce0df.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/015c9d61-e941-44e6-bebd-3c697a6d781e.png.

*Необходимое и достаточное условие дифференцируемости*

**Теорема 1.** Для того, чтобы функция *f*(*x*) была дифференцируема в точке *x*0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную. **Следствие.** Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

**Замечание.** Дифференциалом dx независимой переменной будем считать приращение Δx, т.е. dx ≡ Δx.

1. **Примеры самостоятельных и практических работ**

***Примеры для самостоятельного решения***

Алгебра и начала математического анализа.10-11 классы: Ш.А.Алимов. 2015

№№ 776 – 781

***Примеры для практических работ***

**1**) Числовые последовательности

***1. Последовательность https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337849/4ee12a7d00bc01baa5aa3b7a1d0d3169.png задана формулой n-го члена:***

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337851/b9284fa6ffbd246c6475d18f429a8de0.png

Найти: первый, пятый, десятый и пятнадцатый члены последовательности.

***2. Доказать, что последовательность возрастает:***

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/337855/84f26600c1fd124c0ca5943997076669.png

Доказательства записать в виде примеров не менее пяти.

***3. Последовательность задана формулой хп=3п2+1.*** Найдите: а) *х1;б) х5; в) хт; г)х3т*.

***4.Последовательность задана рекуррентным способом***: *у1=-3, уп+1=2уп+5.* Найдите первые три члена последовательности.

***5. Сколько членов последовательности 3, 6, 9, 12,….меньше числа 95?***

***6. Подберите формулу n- го члена последовательности - 2; 4; - 6; 8; -10;…***

2) Алгебра и начала математического анализа.10-11 классы: Ш.А.Алимов. 2015

№№ 782 – 786;

3) **Ответить на вопросы письменно.**

1. Как называется раздел математики, который мы начали изучать?

2. Как найти скорость, зная расстояние и время?

3. Какую скорость мы получим?

4. Какую скорость мы видим на спидометре?

5. Где ещё можно увидеть значение мгновенной скорости?

6. Чем является мгновенная скорость для пути?

7. Как обозначается производная?

8. Что означает lim?

9. Что означает Δx; Δf?

10. Определение производной.

11. Как называется операция вычисления производной?

12. Где применяется понятие производной?

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Данное пособие разработано в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «математика» для студентов техникума.

Выполнению практических заданий, даёт понимание о имеющихся «пробелах в знаниях».

В результате изучения темы студент должен

***Знать:***

Знать виды числовых последовательностей и порядок их нахождения.

Иметь представление о производной функции , ее свойствах.

*Уметь*:

Выполнять практические расчеты по формулам. Применять знания для решения задач

**Список литературы и источников**

1. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б.. – М.: Просвещение, 2014.
2. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл Шабунин М.И., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. Дидактические материалы. – М.: Просвещение, 2017.
3. Алгебра и начало математического анализа 10 – 11 кл. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М. и др., – М.: Просвещение, 2014
4. Электронные ресурсы: открытый банк заданий по математике, телекоммуникационная система СтатГрад

**Литература для студентов:**

1. Семенов А.Л., Ященко И.В. ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания. М: Издательство «Экзамен», 2014.  
2.Семенов А.Л. и др. ЕГЭ. 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В М: Издательство «Экзамен», 2014  
3. [Высоцкий И.Р, Гущин Д.Д, Захаров П.И. и др. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2014. Математика](http://www.twirpx.com/file/100733/). М.: Издательство «Экзамен», 2014  
4. ЕГЭ 2014. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2012

**Источники информации для дополнительного изучения математики студентами**

1. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы. Под редакцией М.И. Сканави, 9-е изд., перераб. И доп. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2008г.  
2. В.С. Крамор. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1993г.  
3. Современный учебно-методический комплекс. Алгебра 10-11. Версия для школьника. Просвещение (все задачи школьной математики).

**Предметные Интернет-ресурсы, цифровые образовательные ресурсы**

[www.mathege.ru](http://www.mathege.ru/)   
<http://festival.1september.ru/>,  
<http://portfolio.1september.ru/>,  
<http://school-collection.edu.ru/>,   
<http://pedsovet.su/load/18>.