

## Пояснительная записка

1.	Автор (ФИО, должность)	Самойлова Людмила Васильевна Должность- преподаватель
2.	Название ресурса	Методическая разработка
3.	Вид ресурса	Практический
4.	Предмет, УМК	Математика
5.	Цель и задачи ресурса	Проверка умений и знаний, подготовка студента к письменному экзамену
6.	Возраст учащихся, для которых предназначен ресурс	1 курс СПО
7.	Программа, в которой создан ресурс	Рабочая программа по дисциплине «Математика», созданная на базе Станкостроительного колледжа и размещенная на сайте Рязанского Государственного Радиотехнического Университета имени В.Ф. Уткина
8.	Методические рекомендации по использованию ресурса	Применять данную разработку можно на занятиях по дисциплине «Математика» на 1 курсе СПО при изучении раздела «Стереометрия»
9.	Источники информации	
	<a href="#"><u>Используемая литература и интернет - источники</u></a>	

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА»  
Рязанский станкостроительный колледж РГРТУ

# **Многогранники и Тела вращения**

**Методическая разработка для студентов 1 курса**

по специальностям:

09.02.07 Информационные системы и программирование  
(квалификация - программист)  
09.02.07 Информационные системы и программирование  
(квалификация - специалист по информационным системам)  
09.02.07 Информационные системы и программирование  
(квалификация - разработчик веб и мультимедийных приложений)  
15.02.08 Технология машиностроения  
15.02.15 Технология металлообрабатывающего производства  
38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)  
38.02.04 Коммерция (по отраслям)  
38.02.07 Банковское дело

Разработчик: Самойлова Л.В., преподаватель РССК «РГРТУ»

Рязань 2022 г.

## Содержание

Пояснительная записка.....	4
Перечень практических работ.....	6
Задания для практических работ.....	7
Многогранники .....	7
Практическая работа №1 .....	7
Призма и параллелепипед .....	7
Практическая работа №2 .....	9
Пирамида, усеченная пирамида .....	9
Тела вращения.....	11
Практическая работа №3 .....	11
Цилиндр.....	11
Практическая работа №4 .....	12
Конус, усеченный конус .....	12
Практическая работа №5 .....	13
«Шар и сфера» .....	13
Общие понятия и формулы .....	14
Решение треугольников.....	21
Методические указания к практическим работам .....	22
Используемая литература и интернет - источники.....	32

### Пояснительная записка

Данная методическая разработка предназначена для закрепления навыков решения стереометрических задач и контроля знаний по темам: "Многогранники" и "Тела вращения". А также может использовать преподаватель в качестве контроля теоретических и практических знаний по данным темам геометрии.

Разработка включает в себя пять практических работ по темам:

- Призма и параллелепипед;
- Пирамида, усеченная пирамида;
- Цилиндр;
- Конус, усеченный конус;
- Шар и сфера.

В каждой работе предложены вопросы теоретической части, на которые студент должен ответить письменно. Для того чтобы выполнить данные практические работы необходимо изготовить геометрические тела дома, выучить соответствующий теоретический материал. По геометрическому телу студент должен сделать необходимые измерения, произвести вычисления, оформить задачу в тетради (нарисовать чертеж задачи, записать дано, найти, полное решение и ответ).

В результате выполнения всех работ студент должен

уметь:

- соотносить плоские геометрические фигуры и трехмерные объекты с их описаниями, чертежами, изображениями; различать и анализировать взаимное расположение фигур;
- изображать геометрические фигуры и тела, выполнять чертеж по условию задачи;
- решать геометрические задачи, опираясь на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат;

- проводить доказательные рассуждения при решении задач, доказывать основные теоремы курса;
- вычислять линейные элементы и углы в пространственных конфигурациях, объемы и площади поверхностей пространственных тел и их простейших комбинаций;
- строить сечения многогранников и изображать сечения тел вращения;
- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур; для вычисления площадей и объемов реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

знать:

- возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;
- различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально - экономических и гуманитарных науках, на практике;
- роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знаний и для практики.

Данная методическая разработка позволит качественно подготовиться к экзаменационным вопросам по геометрии.

### **Перечень практических работ**

1. Практическая работа №1 "Призма и параллелепипед"
2. Практическая работа №2 "Пирамида, усеченная пирамида"
3. Практическая работа №3 "Цилиндр"
4. Практическая работа №4 "Конус, усеченный конус"
5. Практическая работа №5 "Шар и сфера"

## Задания для практических работ

### Многогранники

#### Практическая работа №1

#### Призма и параллелепипед

##### 1. Фигура - параллелепипед.

Необходимые измерения: линейкой измерить длину, ширину, высоту.

По данным измерениям найти:

- диагональ параллелепипеда
- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры.

##### 2. Фигура - прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$

Необходимые измерения: линейкой измерить все ребра. По данным измерениям найти:

- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- Объем фигуры
- площадь сечения, проведенного через боковое ребро  $AA_1$  и середину ребра основания  $BC$
- двугранный угол  $\angle ACC_1B_1$

##### 3. Фигура - прямая четырехугольная призма $ABCD A_1B_1C_1D_1$

Необходимые измерения: линейкой измерить все ребра.

По данным измерениям найти :

- диагонали призмы
- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры
- площадь диагонального сечения
- двугранный угол  $ADD_1C_1$ .

#### 4. Фигура - наклонная призма.

Необходимые измерения: линейкой измерить все ребра.

По данным измерениям найти:

- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры.

#### Контрольные вопросы:

- Геометрическое тело
- Определение многогранника
- Определение призмы
- Виды призм, их определения
- Элементы призмы
- Определение параллелепипеда, его виды и элементы
- Виды сечений призмы
- Объем параллелепипеда и призмы



## Практическая работа №2

### Пирамида, усеченная пирамида

#### 1. Фигура - треугольная пирамида.

Необходимые измерения: линейкой измерить все ребра.

По данным измерениям найти:

- высоту пирамиды
- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- Объем фигуры
- площадь сечения, проходящего через боковое ребро и апофему противоположащей грани
- Угол между боковой гранью и плоскостью основания.

#### 2. Фигура - четырехугольная пирамида.

Необходимые измерения: линейкой измерить все ребра.

По данным измерениям найти:

- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры
- Площадь сечения, проходящего через диагональ основания и боковое ребро
- Угол между боковой гранью и плоскостью основания.

#### 3. Фигура - усеченная треугольная пирамида.

Необходимые измерения: линейкой измерить все ребра:

По данным измерениям найти:

- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры
- Площадь сечения, проходящего через высоту основания и боковое ребро.

#### 4. Фигура - усеченная четырехугольная пирамида.

Необходимые измерения: линейкой измерить.

По данным измерениям найти:

- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры
- Площадь сечения, проходящего через два противоположных боковых ребра.

#### Контрольные вопросы:

- Определение пирамиды, усеченной пирамиды
- Виды пирамид, их определения
- Элементы пирамиды
- Виды сечений
- Объем пирамиды

# Тела вращения

## Практическая работа №3

### Цилиндр

Необходимые измерения: линейкой измерить диаметр и высоту цилиндра.

По данным измерениям найти:

- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры
- Угол наклона диагонали осевого сечения к плоскости основания
- Найти площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии  $L$  (задать каждому студенту индивидуально) от нее.

#### Контрольные вопросы:

- Определение цилиндра
- Дать определение прямого и равностороннего цилиндра
- Элементы цилиндра
- Виды сечений
- Объем цилиндра

## Практическая работа №4

### Конус, усеченный конус

Необходимые измерения: линейкой измерить образующую и диаметр основания.

По данным измерениям найти:

- площадь боковой поверхности
- площадь полной поверхности
- объем фигуры
- Площадь осевого сечения
- Угол наклона образующей к плоскости основания.

Контрольные вопросы:

- Определение конуса, усеченного конуса
- Элементы конуса
- Виды сечений
- Площадь и объем конуса, усеченного конуса

## Практическая работа №5

### «Шар и сфера»

Необходимые измерения: измерить длину диаметальной окружности.

По данным измерениям найти:

- Радиус фигуры
- Площадь поверхности сферы
- Объем шара
- Найти площадь сечения шара или сферы плоскостью, проведенной на расстоянии  $X$  (задать каждому студенту индивидуально) от центра.

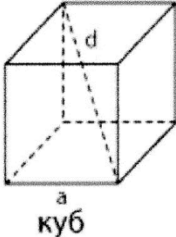
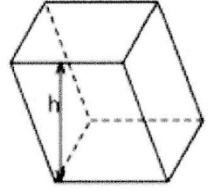
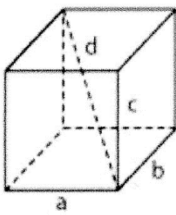
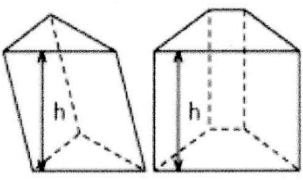
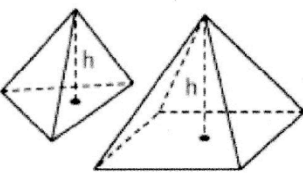
#### Контрольные вопросы:

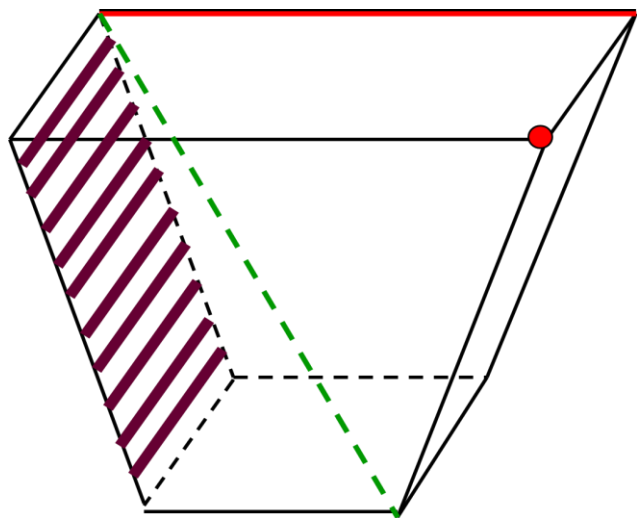
- Определение шара, сферы
- Виды сечений шара и сферы
- Уравнение сферы
- Определение плоскости, касательной к шару
- Определение шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора
- Взаимное расположение сферы и плоскости.

# Общие понятия и формулы

## Общие формулы и понятия

### МНОГОГРАННИКИ

объем	площадь поверхности	еще
 $V=a^3$ a - ребро куба куб	$S=6a^2$	$d=a\sqrt{3}$ длина диагонали
 $V=S_{осн} \cdot h$ $S_{осн}$ - площадь основания h - высота параллелепипед		
 $V=a \cdot b \cdot c$ прямоугольный параллелепипед	$S=2ab+2bc+2ac$	$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ длина диагонали
 $V=S_{осн} \cdot h$ призма	$S=2S_{осн}+S_{бок}$	
 $V=\frac{1}{3}S_{осн} \cdot h$ пирамида	$S=S_{осн}+S_{бок}$	

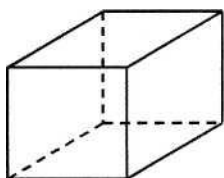


- Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников, называемых гранями.

➤ Стороны и вершины этих многоугольников называются

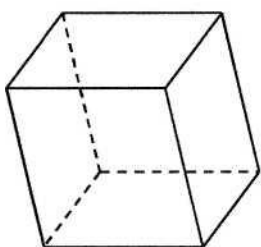
ребрами и вершинами.

- Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются диагоналями.



### Куб

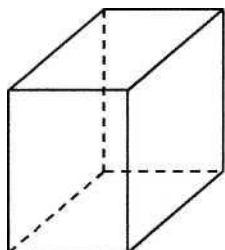
Многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов



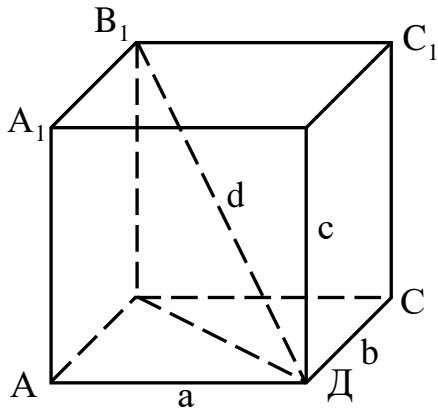
### Параллелепипед

Многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов

### Прямоугольный параллелепипед.



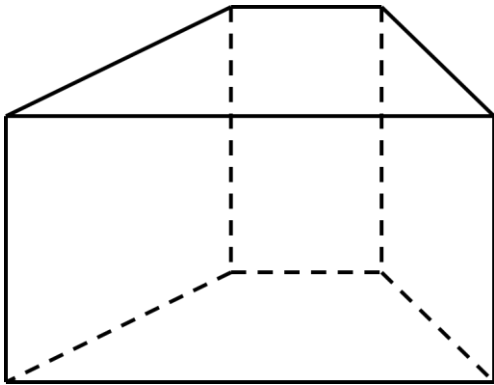
Параллелепипед называется прямоугольным, если все его грани прямоугольники



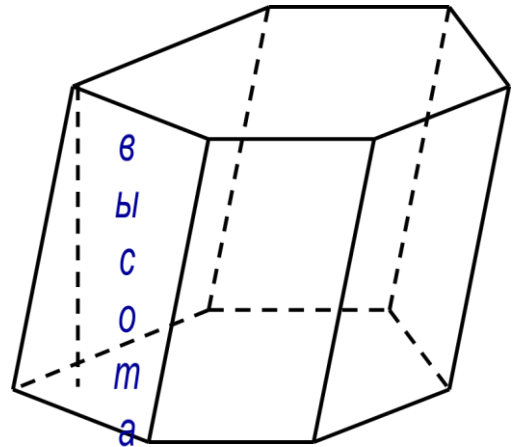
$a, b, c$  – измерения прямоугольного параллелепипеда  
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$  – свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда

### Призма

Многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований.



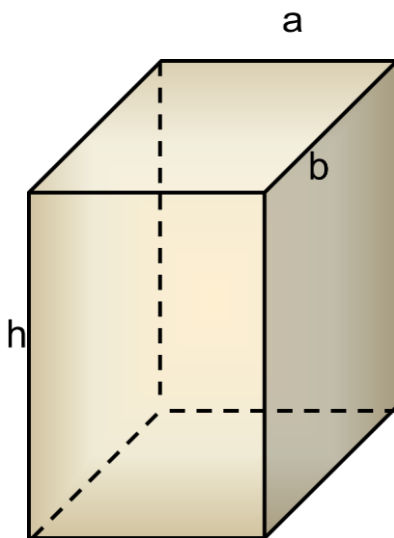
п  
р  
я  
м  
а  
я



н  
а  
к  
л  
о  
н  
н  
а  
я

- Два равных многоугольника называют основаниями призмы
- Параллелограммы называют боковыми гранями призмы
- Перпендикуляр, проведенный из вершины одного основания к плоскости другого основания называют высотой.

### Площадь призмы

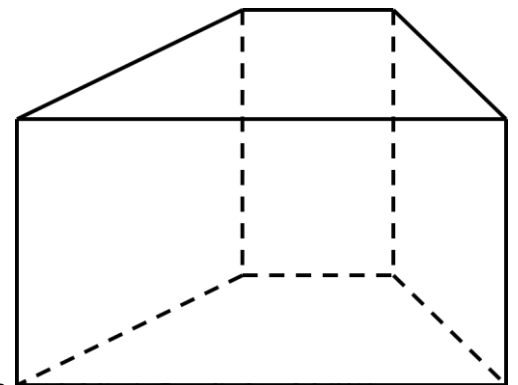


$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн}}$$

Теорема: Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

$$S_{\text{бок.}} = Ph$$

$$S_{\text{бок.}} = ah + ah + bh + bh = h(2a + 2b) = Ph$$

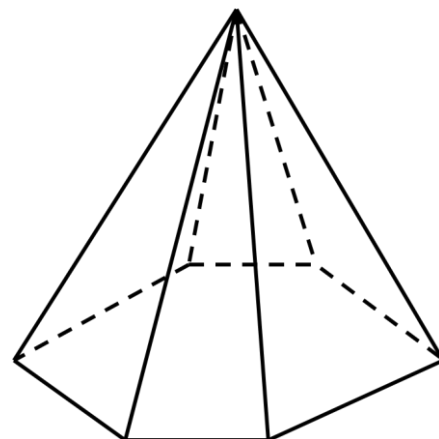
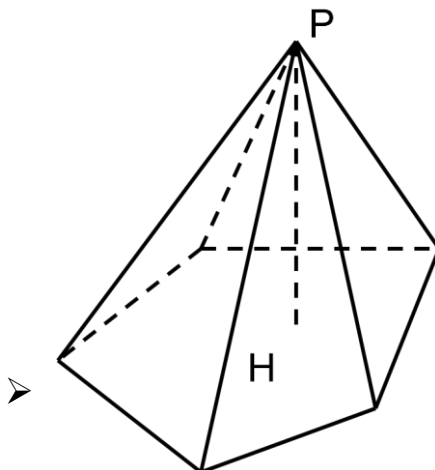
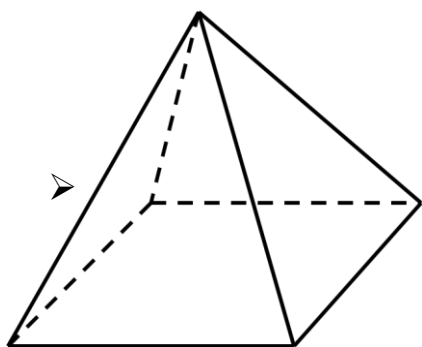




## Пирамида

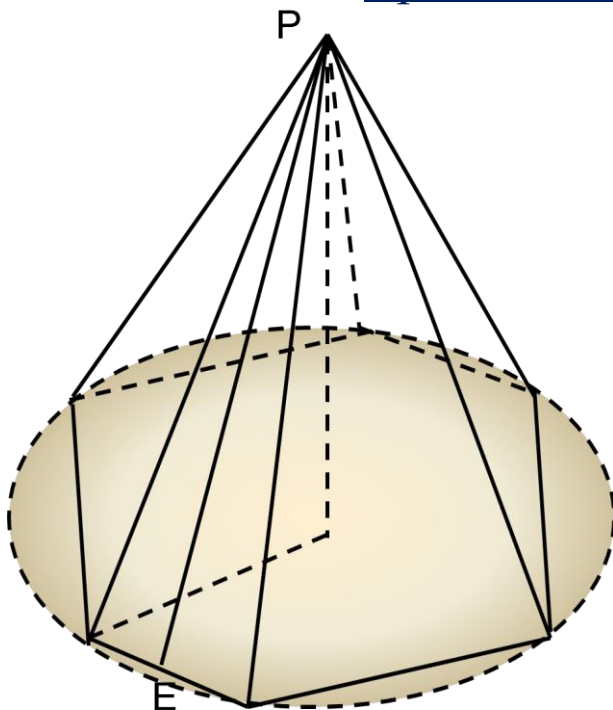
Многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника и треугольников, имеющих общую вершину.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$



- Многоугольник называют основанием пирамиды
- Треугольники называют боковыми гранями
- Общую вершину называют вершиной пирамиды
- Перпендикуляр PH называют высотой

## Правильная пирамида



Основание правильный многоугольник, высота опущена в центр основания.

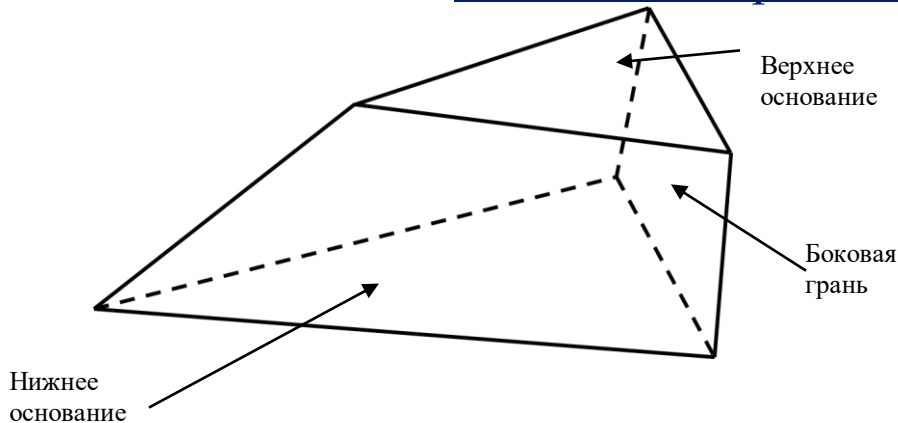
- Боковые ребра равны
- Боковые грани – равные равнобедренные треугольники
- Основание высоты совпадает с центром вписанной или описанной окружности

➤ Перпендикуляр  $PE$  называют апофемой

Теорема: Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P d$$

### Усеченная пирамида



➤ Боковые грани – трапеции

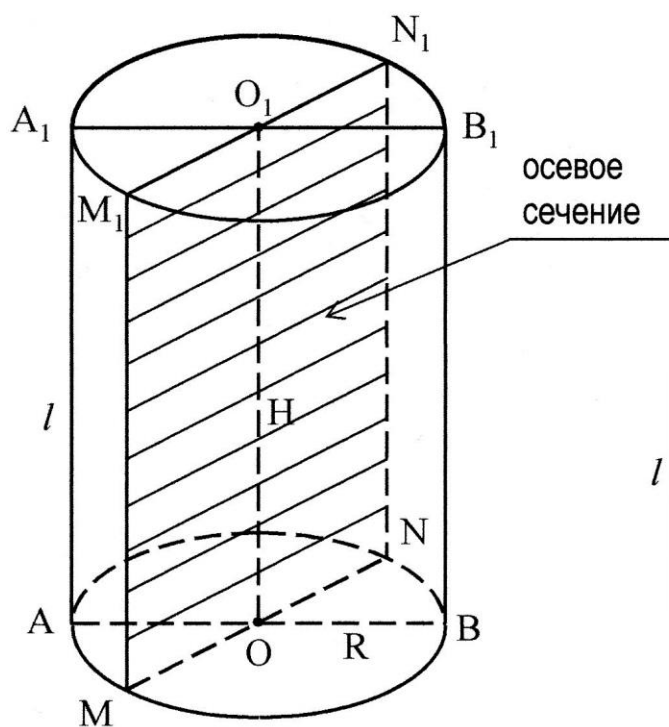
Теорема: Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна половине произведения полусуммы периметров оснований на апофему

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) d$$

$$S_{\text{б}} = \sum S_{\text{б.гр.}}; \quad S_{\text{н}} = S_{\text{б}} + S_{\text{в}} + S_{\text{н}}$$

$$V = \frac{1}{3} H \cdot (S_{\text{в}} + \sqrt{S_{\text{в}} \cdot S_{\text{н}}} + S_{\text{н}});$$

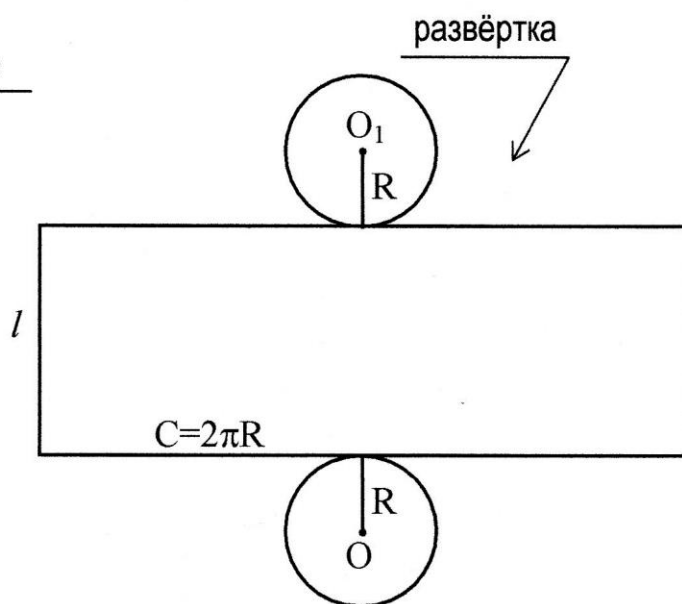
## ЦИЛИНДР



$$S_{\text{б}} = 2\pi \cdot R \cdot l,$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H$$

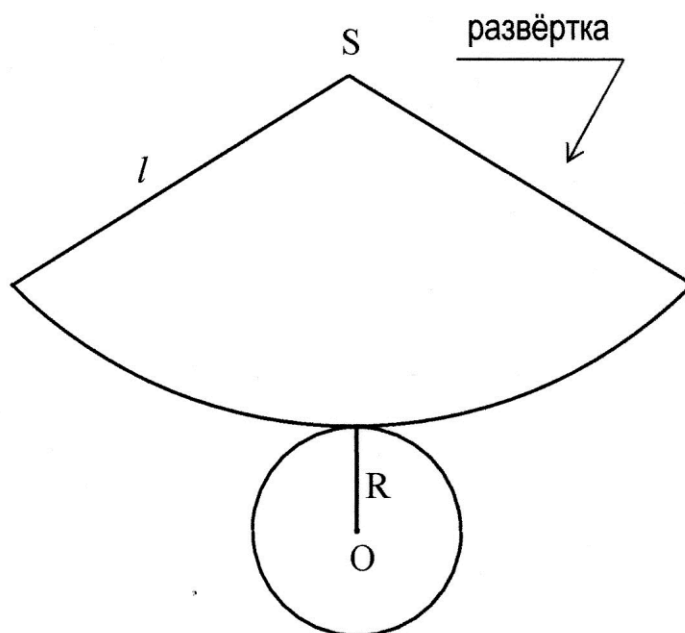
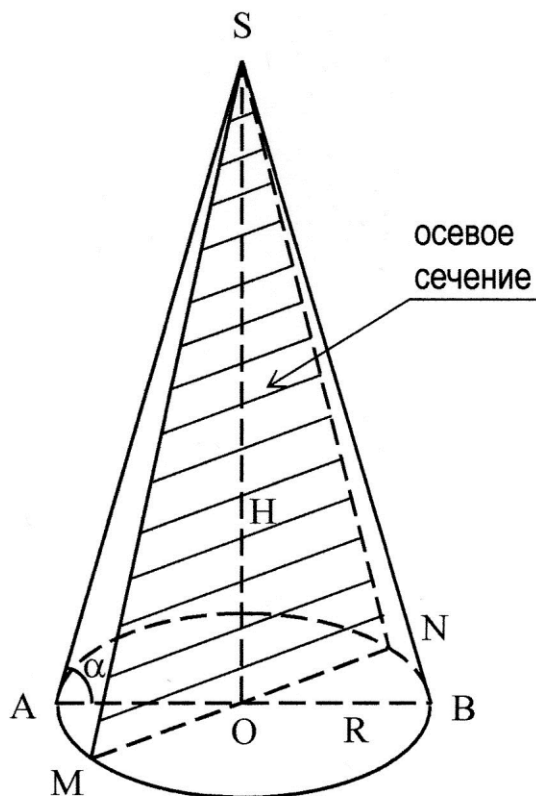
$l$  – образующая  
 $R$  – радиус основания  
 $H$  – высота



$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}}$$

Если  $l = 2R$  – цилиндр равносторонний

## КОНУС



$$S_{\text{б}} = \pi R \cdot l,$$

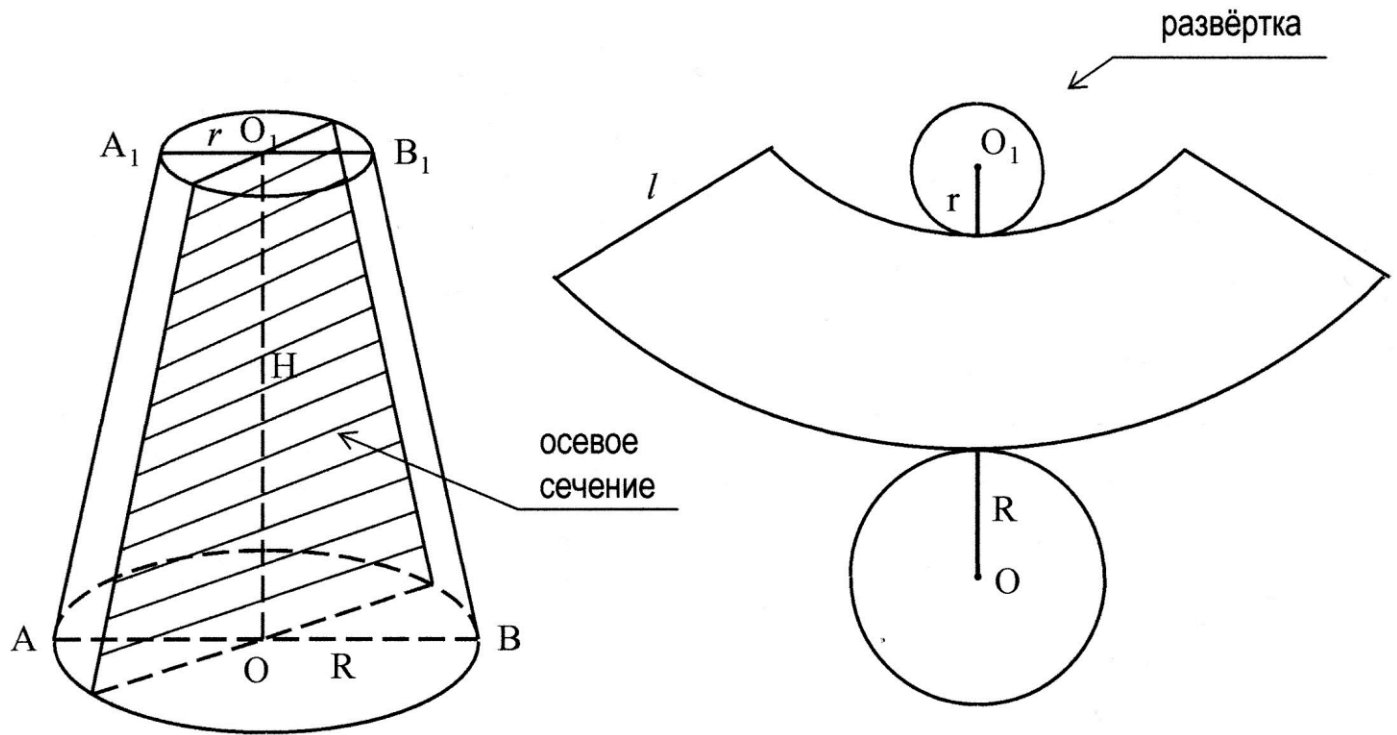
$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

Если  $l = 2R$  – конус равносторонний

$\alpha$  – угол наклона образующей к плоскости основания

## УСЕЧЁННЫЙ КОНУС



$$S_{\text{б}} = \pi l(R + r)$$

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{в}} + S_{\text{н}}$$

$$V = \frac{1}{3}H \cdot (S_{\text{в}} + \sqrt{S_{\text{в}} \cdot S_{\text{н}}} + S_{\text{н}}), \text{ где } S_{\text{в}} = \pi r^2 \text{ и } S_{\text{н}} = \pi R^2$$

## Шар или сфера

Шаровой или сферической поверхностью ( иногда просто сферой) называют геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки – центра шара.

Площадь поверхности шара находится по формуле:

$$S = 4 \pi R^2$$

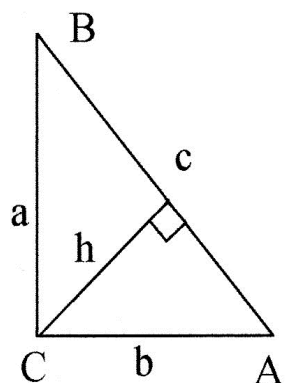
Объем шар вычисляется по формуле:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$



# Решение треугольников

## Прямоугольных



$c$  – гипотенуза

$a, b$  – катеты

$$c^2 = a^2 + b^2$$

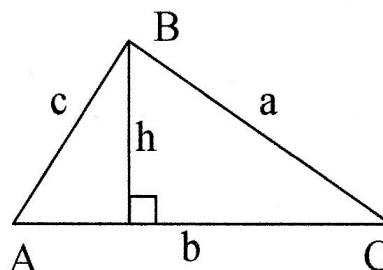
т. Пифагора

$$\sin \angle A = \frac{a}{c}; \quad \cos \angle A = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \angle A = \frac{b}{a}.$$

$$S_{\Delta} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \end{cases}$$

## Косоугольных



т. Синусов

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

т. Косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \angle A$$

$$S_{\Delta} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \angle A \\ \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$$

## Методические указания к практическим работам

Для практической работы №1  
Призма и параллелепипед

Дано:

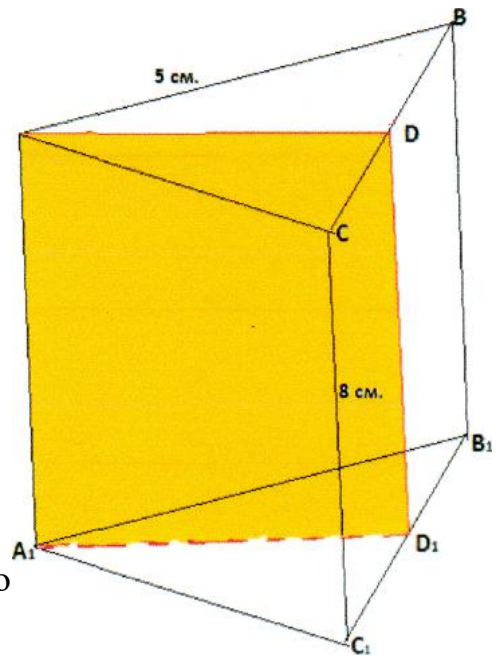
$ABCA_1B_1C_1$  - прямая правильная

треугольная призма.

$AB = 5$  см.  $CC_1 = 8$  см.

Найти:

1. площадь боковой поверхности
2. площадь полной поверхности.
3. Объем фигуры
4. площадь сечения, проведенного через боково ребра основания  $BC$
5. двугранный угол  $ACC_1B_1$ .



Решение:

- 1) площадь боковой поверхности призмы находится по формуле:

$$S_{б.п.} = P_{осн.} \cdot CC_1,$$

где  $P_{осн.}$  - периметр основания

$$P_{осн.} = AB + BC + AC = 3 \cdot AB = 3 \cdot 5 = 15 \text{ см.}$$

$$\text{Тогда } S_{б.п.} = 15 \cdot 8 = 120 \text{ см}^2.$$

- 2) площадь полной поверхности призмы находится по формуле:

$S_{п.п.} = S_{б.п.} + 2 \cdot S_{осн.}$ , где  $S_{осн.}$  - площадь основания, которая находится по формуле  $S_{осн.} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

$$S_{осн.} = \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} \approx 10,8 \text{ см}^2.$$

$$\text{Следовательно: } S_{п.п.} = 120 + 2 \cdot 10,8 = 141,6 \text{ см}^2.$$

3) Объем фигуры находится по формуле :  $V_{\phi} = S_{\text{осн}} \cdot H$ ,

где  $H$  -высота призмы

$$H = CC_1 = 8 \text{ см.}$$

$$\text{Итак, } V_{\phi} = 10,8 \cdot 8 = 86,4 \text{ см}^3.$$

4) сечение, проведенное через боковое ребро  $AA_1$  и середину  $D$  ребра основания  $BC$  - это есть прямоугольник  $ADD_1A_1$  ( см. рис.),

где  $D_1$  -середина  $B_1C_1$

$$S_{\text{сеч.}} = S_{ADD_1A_1} = AD \cdot AA_1$$

Найдем  $AD$  из равностороннего треугольника  $ABC$  ( $AD$  -является медианой и высотой). Применим теорему Пифагора для прямоугольного треугольника  $ABD$ :

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$AD^2 = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 2,5^2} \approx 4,3 \text{ см.}$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{сеч.}} = 4,3 \cdot 8 = 34,4 \text{ см}^2.$$

5) Размерность двугранного угла  $ACC_1B_1$  соответствует размерности

линейного угла  $ACB$ . А т.к. треугольник  $ABC$  - равносторонний, то угол  $ABC$  равен  $60^\circ$ . Значит двугранный угол  $ACC_1B_1$  равен  $60^\circ$ .

Ответ: 1)  $120 \text{ см}^2$ ; 2)  $141,6 \text{ см}^2$ ; 3)  $86,4 \text{ см}^3$ ; 4)  $34,4 \text{ см}^2$ ; 5)  $60^\circ$ .

\

Для практической работы № 2  
Пирамида, усеченная пирамида

Дано:

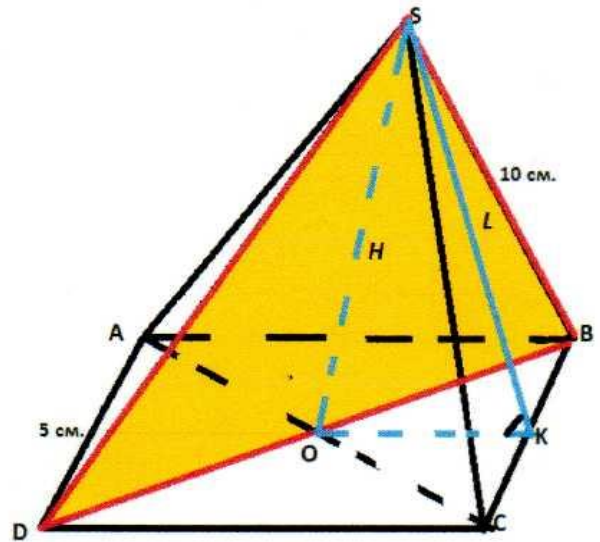
$SABCD$  -правильная четырехугольная

пирамида  $SB = 10$  см.

$AD = 5$  см.

Найти:

- 1) площадь боковой поверхности
- 2) площадь полной поверхности
- 3) Объем фигуры
- 4) Площадь сечения, проходящего через диагональ основания и боковое ребро
- 5) Угол между боковой гранью и плоскостью основания.



Решение:

- 1) Площадь боковой поверхности пирамиды находится по формуле :

$$S_{б.п} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot L, \text{ где } P_{осн.} - \text{периметр основания, } L = SK - \text{апофема (см. рис.)}$$

Т.к.  $ABCD$  - квадрат, то  $P_{осн} = 4 \cdot BC = 4 \cdot 5 = 20$  см.

Найдем  $L$  из равнобедренного треугольника  $SCB$ . Рассмотрим

прямоугольный треугольник  $SKB$ :  $KB = \frac{1}{2} CB = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5$  см.

$$SB = 10 \text{ см.}$$

По теореме Пифагора :  $SK^2 = SB^2 - KB^2$

$$SK^2 = 10^2 - 2,5^2 = 93,75$$

$$SK \approx 9,7 \text{ см.}$$

Итак,  $L = 9,7$  см.

$$\text{Значит, } S_{б.п} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9,7 = 97 \text{ см}^2.$$



2) Площадь полной поверхности пирамиды находится по формуле:

$S_{\text{п.п}} = S_{\text{б.п}} + S_{\text{осн}}$ , где  $S_{\text{осн}}$  - площадь основания

$S_{\text{осн}} = AD^2 = 5^2 = 25 \text{ см}^2$ , т.к. ABCD – квадрат

Тогда  $S_{\text{п.п}} = 97 + 25 = 122 \text{ см}^2$ .

3) Объем фигуры находится по формуле:  $V_{\text{ф}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$ , где H - высота пирамиды (SO).

Найдем ее из прямоугольного треугольника SOK по теореме Пифагора:

$SO^2 = SK^2 - OK^2$ , где  $OK = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,5 \text{ см}$ .

$SO^2 = 9,7^2 - 2,5^2 = 87,84$

$SO \approx 9,4 \text{ см}$ .

Значит,  $H = 9,4 \text{ см}$ .

Итак,  $V_{\text{ф}} = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 9,4 = 78,8 \text{ см}^3$ .

4) Сечение, проходящее через диагональ основания и боковое ребро - есть треугольник SDB (см. рис.). Он равнобедренный. Высота в нем SO. Его

площадь находится по формуле:  $S_{\Delta SDB} = \frac{1}{2} \cdot SO \cdot DB$

Найдем DB из основания пирамиды, т.е. из прямоугольного треугольника DBC по теореме Пифагора :

$$DB^2 = DC^2 + CB^2$$

$$DB^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

$$DB = \sqrt{50} \approx 7,1 \text{ см}.$$

Итак,  $S_{\text{сеч}} = S_{\Delta SDB} = \frac{1}{2} \cdot 9,4 \cdot 7,1 = 33,37 \text{ см}^2$ .

б) Углом между боковой гранью и плоскостью основания является

линейный угол SKO. Найдем его из прямоугольного треугольника SOK:

$$\sin SKO = \frac{SO}{SK} = \frac{9,4}{9,7} \approx 0,97$$

$$\angle SOK = \arcsin 0,97 = 75,7^\circ$$

Ответ: 1)  $97 \text{ см}^2$ ; 2)  $122 \text{ см}^2$ ; 3)  $78,3 \text{ см}^3$ ; 4)  $33,37 \text{ см}^2$ ; 5)  $75,7^\circ$

Цилиндр

Дано: Цилиндр

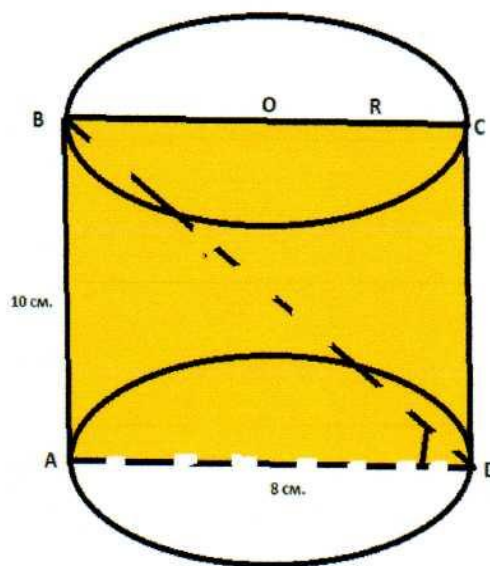
$$D=AD=8 \text{ см.}$$

$$L=2 \text{ см.}$$

$$H=AB=10 \text{ см.}$$

Найти:

1. площадь боковой поверхности
2. площадь полной поверхности
3. объем фигуры
4. Угол наклона диагонали осевого сечения к плоскости основания
5. Найти площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии  $L$  от нее.



Решение:

- 1) Площадь боковой поверхности цилиндра находится по формуле:

$$S_{б.п} = 2\pi R H, \text{ где } R - \text{радиус основания, } H - \text{высота цилиндра}$$

$$R = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ см.}$$

$$S_{б.п} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 = 80 \pi \text{ см}^2$$

- 2) Площадь полной поверхности цилиндра находится по формуле :

$$S_{п.п} = 2\pi R(R+H)$$

$$S_{п.п} = 2\pi \cdot 4 \cdot (4+10) = 112\pi \text{ см}^2$$

- 3) Объем цилиндра находится по формуле:

$$V_{\phi} = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi \text{ см}^3$$

- 4) Осевым сечением является прямоугольник ABCD (см. рис.). BD - его диагональ. Значит, углом между диагональю осевого сечения и плоскостью

основания является угол BDA.

Найдем его из прямоугольного треугольника

BDA:

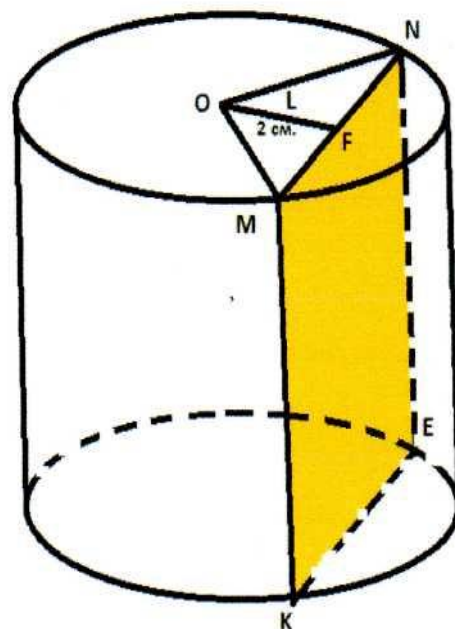
$$\operatorname{tg} BDA = \frac{BA}{AD} = \frac{10}{8} = 1,25$$

$$\angle BDA = \operatorname{arctg} 1,25 \approx 51^\circ$$

5) Рассмотрим рисунок. Расстояние от оси цилиндра до секущей плоскости

$$L = OF = 2 \text{ см.}$$

Сечением является прямоугольник MNEK.



Его площадь находится по формуле :

$$S_{\text{сеч}} = S_{\text{MNEK}} = MN \cdot NE, \text{ где } NE = H = 10 \text{ см.}$$

Найдем MN.  $MN = 2 MF$ .

Рассмотрим прямоугольный треугольник OFM:  $\angle F = 90^\circ$ ,  $OF = 2 \text{ см.}$ ,  $OM = R = 4 \text{ см.}$

По теореме Пифагора:  $MF^2 = OM^2 - OF^2$

$$MF^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$MF = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \text{ см}$$

$$\text{Тогда } MN = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ см.}$$

$$\text{Итак, } S_{\text{сеч}} = 4\sqrt{3} \cdot 10 = 40\sqrt{3} \text{ см}^2$$

Ответ: 1)  $80\pi \text{ см}^2$ ; 2)  $112\pi \text{ см}^2$ ; 3)  $160\pi \text{ см}^3$ ; 4)  $51^\circ$ ; 5)  $40\sqrt{3} \text{ см}^2$

Для практической работы № 4

Конус, усеченный конус

Дано:

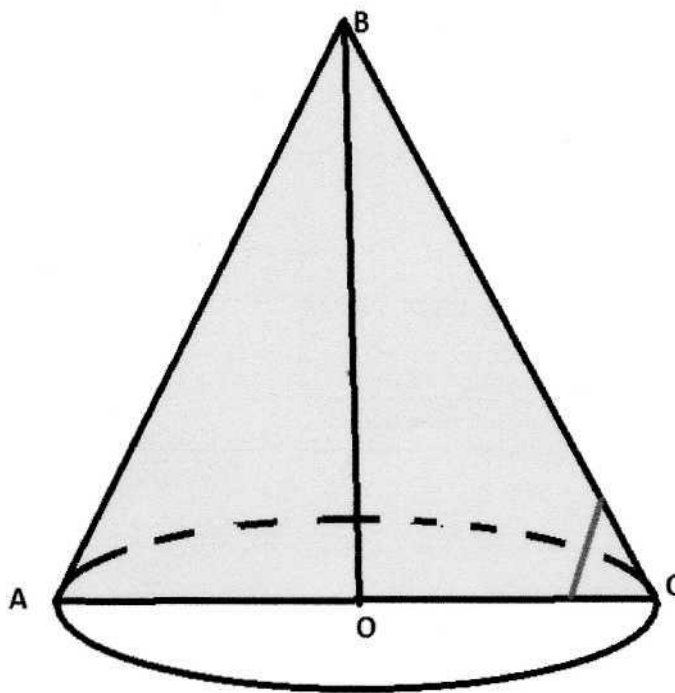
Конус

$$AB = 10 \text{ см.}$$

$$D = AC = 16 \text{ см.}$$

Найти:

- 1) площадь боковой поверхности
- 2) площадь полной поверхности
- 3) объем фигуры
- 4) Площадь осевого сечения
- 5) Угол наклона образующей к плоскости основания.



Решение:

- 1) Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле :

$$S_{\text{бн}} = \pi R L, \text{ где } R - \text{ радиус основания, } L - \text{ образующая (см.рис.)}$$

$$R = \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ см.}$$

$$S_{\text{бн}} = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80 \pi \text{ см}^2$$

- 2) Площадь полной поверхности конуса находится по формуле :

$$S_{\text{пн}} = \pi R(R + L)$$

$$S_{\text{пн}} = \pi \cdot 8 \cdot (8 + 10) = 144 \pi \text{ см}^2$$

- 3) Объем конуса находится по формуле :

$$V_{\text{ф}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \text{ где } H - \text{ высота конуса}$$

Найдем  $H = BO$  из прямоугольного треугольника BOC по теореме Пифагора

$$BO^2 = BC^2 - OC^2$$

$$BO^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$BO = 6 \text{ см.}$$

$$H = 6 \text{ см.}$$

$$\text{Итак, } V_{\phi} = \frac{1}{3} \cdot \Pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 128 \Pi \text{ см}^3$$

4) Осевым сечением является равнобедренный треугольник ABC (см. рис.)

$$\text{Значит, } S_{\text{ос.сеч.}} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot H \cdot D$$

$$S_{\text{ос.сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48 \text{ см}^2$$

5) Угол между образующей и основанием есть угол BCO. Найдем его из прямоугольного треугольника BOC.

$$\sin BCO = \frac{BO}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\angle BCO = \arcsin 0,6 \approx 36,9^\circ$$

*Ответ:* 1)  $80\Pi \text{ см}^2$ ; 2)  $144\Pi \text{ см}^2$ ; 3)  $128\Pi \text{ см}^3$ ; 4)  $48 \text{ см}^2$ ; 5)  $36,9^\circ$

*Для практической работы № 5*  
*Шар и сфера*

*Дано:*

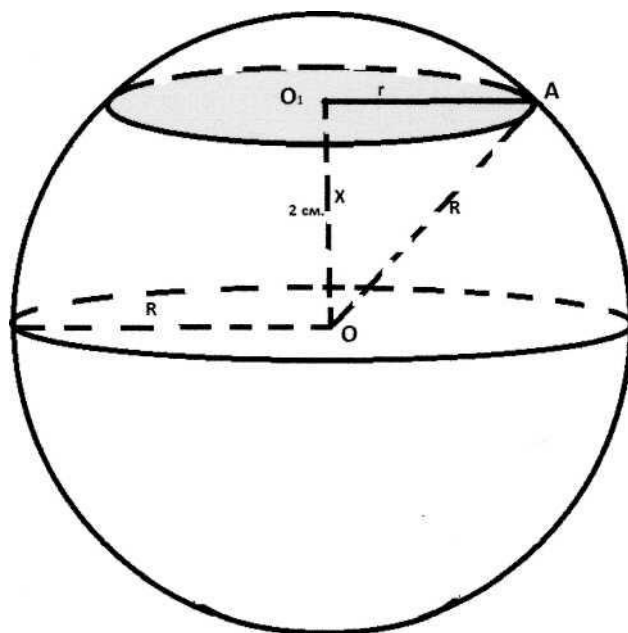
Шар

$L_{\text{диаметр.окружн}} = 26 \text{ см.}$

$X = 2 \text{ см.}$

*Найти:*

- 1) Радиус фигуры
- 2) Площадь поверхности сферы, окруженной шар
- 3) Объем шара
- 4) Найти площадь сечения шара плоскостью, проведенной на расстоянии  $X$  от центра.



*Решение:*

- 1) Длина диаметральной окружности находится по формуле:

$$L_{\text{диаметр.окружн}} = 2 \pi R,$$

$$\text{значит } R = \frac{L_{\text{диаметр.окружн}}}{2\pi} = \frac{26}{2\pi} \approx 4,14 \text{ см.}$$

- 2) Площадь сферы, окруженной шар находится по формуле :

$$S_{\text{сф.}} = 4 \pi R^2$$

$$S_{\text{сф}} = 4\pi \cdot 4,14^2 \approx 68,6\pi \text{ см}^2$$

- 3) Объем шара находится по формуле:

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi \cdot 4,14^3 = 94,6\pi \text{ см}^3$$

- 4) Сечением шара плоскостью - есть круг (см. рис.). Тогда площадь сечения равна площади круга:  $S_{\text{сеч}} = S_{\text{кр.}} = \pi r^2$ , где  $r = O_1A$  - радиус сечения.

Найдем  $O_1A$  из прямоугольного треугольника  $OO_1A$ . В нем:  $OO_1 = X = 2 \text{ см.}$

$$O_1A = R = 4,14 \text{ см.}$$

По теореме Пифагора получаем:

$$O_1A^2 = OA^2 - OO_1^2$$

$$O_1A^2 = 4,14^2 - 2^2 = 13,14$$

$$O_1A = 3,6 \text{ см.}$$

$$r = 3,6 \text{ см.}$$

$$\text{Итак, } S_{\text{сеч}} = \pi \cdot 3,6^2 = 13,14 \pi \text{ см}^2$$

*Ответ:* 1) 4,14 см. ; 2) 68,6  $\pi$  см<sup>2</sup> ; 3) 94,6 см<sup>3</sup> ; 4) 13,14  $\pi$  см<sup>2</sup>

## Используемая литература и интернет - источники

### *Основные источники:*

1. Дадаян А. А. Математика: Учебник для среднего профессионального образования - издательство «Форум», 2019 г.
2. Дадаян А.А. Сборник задач по математике: Учебное пособие – издательство «Форум», 2017 г.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике - Москва « Высшая школа», 2008 г.
4. Пехлецкий И.Д. Математика: Учебник для среднего профессионального образования - издательство центр «Академия», 2019 г.

### *Дополнительные источники:*

1. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 - 11 кл. общеобразовательных учреждений / Под ред. А.Н. Колмогорова - издательство «Просвещение», 2017 г.
2. Богомолов Н.В., Сергиенко Л.Ю. Сборник дидактических заданий по математике: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. Издательство Дрофа, Москва, 2017 г.
3. Балаян Э.Н. Математика. Учебное пособие. Издательство «Феникс», 2017 г.
4. Филимонова Е.В. Математика. Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. Издательство « Феникс», 2018 г.

### *Интернет -ресурсы:*

1. <http://window.edu.ru>
2. <http://www.edu.ru>
3. <http://fcior.edu.ru>