**«Электронный образовательный курс**

**«Комбинаторика»**

Колесниченко Екатерина Юрьевна,

Учитель математики ГАОУ СО «ФТЛ №1»

Саратов 2021

# 

# Содержание

[Содержание](#_Toc89353476)

[Введение 3](#_Toc89353477)

[1. История возникновения и развития комбинаторики. 9](#_Toc89353478)

[2. Комбинаторные задачи и методы их решения 14](#_Toc89353479)

[2.1. Составление комбинаций. Перебор вариантов. 14](#_Toc89353480)

[2.2. Перечисление перестановок. 14](#_Toc89353481)

[2.3. Дерево возможных вариантов. 15](#_Toc89353482)

[2.4. Таблица. 16](#_Toc89353483)

[2.5. Графы. 17](#_Toc89353484)

[2.6. Правила сложения и умножения. 19](#_Toc89353485)

[3. Перестановки, размещения и сочетания без повторений. 24](#_Toc89353486)

[3.1. Перестановки 24](#_Toc89353487)

[3.2. Размещения 26](#_Toc89353488)

[3.3. Сочетания 29](#_Toc89353489)

[3.4. «Фиксирование» элементов 31](#_Toc89353490)

[3.5. «Склеивание» элементов 32](#_Toc89353491)

[4. Перестановки размещения и сочетания с повторениями 33](#_Toc89353492)

[4.1. Перестановки с повторениями 33](#_Toc89353493)

[4.2. Размещения с повторениями 34](#_Toc89353494)

[4.3. Сочетания с повторениями 35](#_Toc89353495)

[4.4. Олимпиадная комбинаторика 37](#_Toc89353496)

[5. Дидактический материал для контроля освоения курса 42](#_Toc89353497)

[5.1. Контрольные вопросы по теории 42](#_Toc89353498)

[5.2. Задачи для самостоятельного решения 44](#_Toc89353499)

[5.3. Тесты первого уровня 45](#_Toc89353500)

[5.4. Тесты второго уровня 51](#_Toc89353501)

[5.5. Тесты третьего уровня 56](#_Toc89353502)

[Заключение 62](#_Toc89353503)

[Список используемых источников 63](#_Toc89353504)

[Приложение А 66](#_Toc89353505)

# Введение

В повседневной жизни нередко перед нами возникают проблемы, которые имеют не одно, а несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, очень важно не упустить ни один из них. Для этого используются различные методы: надо осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их число. Такого рода задачи называют комбинаторными. С решением комбинаторных задач связаны многие задачи статистики, теории вероятностей, теории рисков. Для школьников эти задачи еще связаны с целым «пластом» олимпиадных приемов.

Магистерская работа является разработкой электронного образовательного курса (ЭОК) «Комбинаторика».

В настоящее время широкое распространение и большую популярность приобрела форма обучения, реализуемая дистанционным образом с использованием информационных технологий. Дистанционное обучение, подразумевает получение знаний без непосредственного присутствия преподавателя с использованием технологий, позволяющих это реализовать.

Развитие электронного образования в современном мире происходит стремительными темпами, что обусловлено условиями жизни и потребностями общества в обучении. Процесс обучения не должен быть привязан к месту и условиям жизни человека. Он должен быть при необходимости реализуем в любом месте и в любое время, вне зависимости от места проживания обучающегося. Электронные курсы позволяют этого добиться. Повышение доступности образования, реализуемое через внедрение новых образовательных технологий, можно назвать ключевой целью дистанционного и электронного обучения. Разработка электронных образовательных ресурсов, охватывающих разные разделы математики, является актуальной темой педагогических исследований.

Целью данной магистерской работы является разработка электронно-образовательного курса, призванного помочь учащимся среднего и старшего звена общеобразовательной школы лучше разобраться в теме «Комбинаторика», повысить к данной теме интерес, мотивировать учащихся изучать ее более глубоко, сформировать у учащихся компетентность, предполагающую самостоятельно получать навыки, используя различные источники информации. В данном курсе рассмотрены задачи различного уровня сложности, показаны различные методы решения комбинаторных задач по принципу «от простого к сложному».

Для создания ЭОК необходимо было решить следующие задачи:

-изучить потребности и способности учащихся с учетом их индивидуальных особенностей

- осуществить анализ литературы по теме «Комбинаторика»

- выявить наиболее значимые теоретические сведения и осуществить подборку практических примеров, заданий для самостоятельного решения и тестовых заданий

- разработать теоретическое и практическое содержание ЭОК.

Для решения этих задач применялся анализ математической и учебно-методической литературы по теме курса, апробация теоретического материала в ходе практики, педагогический эксперимент, анализ экспериментальных данных.

Научная новизна работы состоит в разработке дидактического материала трех уровней сложности.

Выпускная работа состоит из введения, исторической справки, теоретической части, тестов трех уровней, заключения и списка литературы.

Во введении рассмотрены цели и задачи курса, показана научная новизна данной работы, приведены результаты тестирования учащихся.

В исторической справке была затронута история возникновения комбинаторики, ее поэтапное развитие и совершенствование, а также приведены примеры некоторых трудов, внесших значительный вклад в развитие этой темы.

Теоретическая часть содержит основной материал по данной теме. В нее вошли основные методы решения комбинаторных задач, такие как перечисление перестановок, дерево возможных вариантов, графы, таблицы, изучены правила суммы и умножения. Рассмотрены комбинации, удовлетворяющие некоторым общим условиям: перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без. Также приведены примеры решения олимпиадных задач.

В дидактической части разработаны контрольные вопросы по теоретической части и тесты трех уровней сложности по практике. Тесты первого и второго уровней сложности содержат пять вариантов заданий по десять вопросов. Тесты третьего уровня содержат три варианта по восемь вопросов. Все тесты даны с решениями, вариантами ответов и ключами к ним.

В заключении работы сформулированы основные выводы.

Список использованных источников состоит из 20 наименований.

Структура электронного образовательного курса

Модуль 5.

Тесты второго уровня

Модуль 6.

Тесты третьего уровня

Модуль 1.

Историческая справка

Модуль 2.

Комбинаторные задачи и методы их решения

Перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без

Модуль 3.

Контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения

Модуль 4.

Тесты первого уровня

Рисунок 1

В тексте работы приведены по одному варианту тестов каждого уровня и их решения. Остальные варианты тестов трех уровней с решениями и ключами к ним рассмотрены в Приложении 1.

Рекомендуется следующий порядок прохождения курса. Сначала ознакомиться с исторической справкой для получения общей информации о развитии изучаемой темы. После чего приступить к изучению теоретической части, включающей разделы «комбинаторные задачи и методы их решения» и «перестановки, размещения и сочетания без повторений». В результате прохождения теории по данным разделам можно перейти к задачам для самостоятельного решения для тренировки перед выполнением контрольного теста первого уровня. Каждая задача в тесте данного уровня будет оцениваться в 1 балл. Модуль считается успешно пройденным, если учащийся набрал от 9 до 10 баллов, за такой результат выставляется оценка «5». Если набирается от 6 до 8 баллов, то выставляется оценка «4». При наборе количества баллов от 3 до 5, обучающийся получает оценку «3». Если полученный результат будет составлять 0-2 балла, то тема считается неосвоенной и имеет смысл вернуться к изучению теоретического материала и более детальному разбору примеров по заданным разделам.

После получения удовлетворительных результатов по первым разделам, можно продолжить изучением модуля «перестановки, размещения и сочетания с повторениями». После изучения данного блока также можно перейти к тренировочным задачам, после чего приступить к тестам второго уровня. В этих тестах первые семь заданий оцениваются в 1 балл, последние три по 2 балла. Итого максимально можно получить 13 баллов. После прохождения данного контрольного материала рекомендуется следующая шкала выставления оценок: 11-13 баллов – оценка «5», 7-10 баллов – оценка «4», 4-6 баллов – оценка «3», 0-3 балла – оценка «2». При получении неудовлетворительного результата необходимо снова обратиться к изучению теоретического материала.

При более высоком интересе к данной теме можно перейти к изучению раздела «олимпиадные задачи». В этом блоке рассмотрены примеры решения олимпиадных задач различных лет. После окончания изучения данного материала рекомендовано пройти контрольные тесты по теоретической части. Материал считается усвоенным, если набрано более 50% правильных ответов.

В завершение изучения данного курса даются тесты третьего уровня, состоящие из 8 вопросов, каждый из которых оценивается в два балла. Оценку «5» учащийся получает за 14-16 набранных баллов. За 10-13 баллов рекомендована оценка «4», 5-9 баллов – оценка «3». При получении 4 баллов и менее необходимо вернуться к разделу «олимпиадные задачи» для повторного изучения.

На освоение данного электронного образовательного курса в среднем предполагается затратить около недели. Но необходимо учитывать уровень знаний учащихся, и в каком классе предлагается прохождение данного курса.

Созданный ЭОК был апробирован в МАОУ «ФТЛ №1» г. Саратов.

По результатам тестирования были выявлены недочеты теоретической и тестовой части ЭОК и проведена соответственная корректировка. Также были подведены итоги тестирования и получены следующие результаты:

Тесты 1 уровня:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Процент  правильных  ответов | 97,44% | 92,31% | 83,34% | 88,47% | 88,47% | 87,18% | 83,34% | 80,77% | 82,06% | 64,11% |

Таблица 1

Тесты 2 уровня:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Процент  правильных  ответов | 95,47% | 93,56% | 87,21% | 85,76% | 91,97% | 83,8% | 84,52% | 79,65% | 77,86% | 75,24% |

Таблица 2

Тесты 3 уровня:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Процент  правильных  ответов | 90,21% | 89,50% | 84,06% | 90,45% | 86,31% | 84,85% | 78,58% | 87,92% |

Таблица 3

Результаты апробации показали хороший уровень освоения темы.

# 

# История возникновения и развития комбинаторики.

Комбинаторика, как раздел математической науки, стал формироваться еще в Древнем Китае при описании популярной китайской игры го. Занимались комбинаторными вопросами и древнегреческие, древнеиндийские математики. Но сформировалась она как наука, можно сказать, в средневековье, как в Европе, так параллельно и в арабском мире, начав решать задачи в теории игр, разгадывать закономерности решения и построения головоломок.

Математики с увлечением взялись исследовать методами комбинаторики свои любимые азартные игры. Существовавшие еще в глубокой древности азартные игры, получившие особенное распространение после крестовых походов, способствовали развитию комбинаторики.

Наибольшее распространение получила игра в кости – два или три кубика с нанесенными на них очками бросали на стол, и ставку брал тот, у кого выпала большая сумма очков. Несмотря на грозные запреты церкви, азартные игры все же развивались. В любом городе можно было наблюдать картину, которая описана в «Божественной комедии» Данте:

В кости играли еще этруски жители Мохенджо-Даро, это известно из археологических раскопок. Однако, эти древние игры не подвергались математическому исследованию довольно долго.

Позже некоторые игроки, которые наиболее часто играли в кости, подметили, что одни суммы очков выпадают часто, а другие – редко. Были составлены таблицы, показывавшие, сколькими способами можно получить то или иное число очков. Сначала допускалась ошибка – подсчитывали только число различных сочетаний, дававших данную сумму [1].

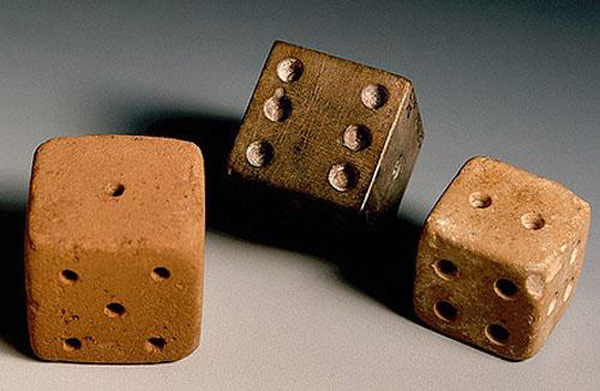


Рисунок 2

Например, при бросании двух костей сумма 6 получается из сочетаний 1+5, 2+4, 3+3, а сумма 7 – из сочетаний 1+6, 2+5, 3+4. Так как три сочетания были различны в обоих случаях, то напрашивался ошибочный вывод о том, что суммы очков 6, 7 и 8 (также получаемые из трех сочетаний костей) должны выпадать одинаково часто. Но согласно опыту 7 очков выпадает чаще. Сочетание 3+3 при бросании двух костей может быть получено единственным способом, а сочетание 3 и 4 – двумя способами: 3+4 и 4+3. Именно благодаря этому, сумма 7 выпадает наиболее часто. Таким образом, оказалось, что надо учитывать не только сочетание очков, но и их порядок [2].

Этими вопросами занимались такие известные итальянские математики XVI века, как Д. Кардано, Н. Тарталья и др. Наиболее полно исследовал данный вопрос в XVII веке Галилео Галилей, но его рукопись оставалась неопубликованной до 1718 г.



Рисунок 3. Галилео Галилей

В 1713 г. была опубликована книга «Искусство предположений» Якоба Бернулли, в которой указывались формулы для числа размещений из  *n* элементов по *k*, выводились выражения для степенных сумм и т. д.

Работы Б. Паскаля и П. Ферма ознаменовали рождение двух новых ветвей математической науки – комбинаторики и теории вероятностей. Ранее комбинаторные проблемы лишь затрагивались в общих трудах по астрологии, логике и математике или большей частью относились к области математических развлечений. В 1666 году В. Лейбниц публикует «Диссертацию о комбинаторном искусстве», в которой впервые появляется термин «комбинаторный». Этот математический труд Лейбница должен был стать лишь началом большой работы, о которой он часто упоминал в своих письмах и печатных трудах. В. Лейбниц планировал для комбинаторики многочисленные приложения: к играм, статистике, к кодированию и декодированию, к теории наблюдений. Он считал, что комбинаторика должна заниматься «одинаковым и различным, похожим и непохожим, абсолютным и относительным расположением, в то время как обычная математика занимается большим и малым, единицей и многим, целым и частью». Иными словами, под комбинаторикой В. Лейбниц понимал примерно то, что мы теперь называем дискретной математикой. К области комбинаторики В. Лейбниц относил и «универсальную характеристику» – математику суждений, то есть прообраз нынешней математической логики. Проекты В. Лейбница казались несбыточными математикам его времени, но сейчас, после создания быстродействующих вычислительных устройств, многие его планы стали претворяться в жизнь, а дискретная математика выросла в своем значении и начала соперничать с математическим анализом [3].

В Новое время в Европе методы комбинаторики стали использоваться при разработке шифров (и сразу же при разработке взломов данных шифров). Финальное завершение формирования науки комбинаторики, и науки вполне самостоятельной, произошло уже в 18-м веке в Европе. Выдающуюся роль в этом сыграл знаменитый математик, физик, астроном и механик Леонард Эйлер, швейцарец, половину жизни проживший и проработавший в столице Российской империи.

После работ Б. Паскаля и П. Ферма, Г. Лейбница и Л. Эйлера можно было уже говорить о комбинаторике как о самостоятельном разделе математики, тесно связанном с другими областями науки, такими, как теория вероятностей, учение о рядах и т.д. Таким образом, комбинаторика как самостоятельная ветвь математики возникла в XVII веке.

В 1713 году было опубликовано сочинение Я. Бернулли "Искусство предположений", в котором с достаточной полнотой были изложены известные к тому времени комбинаторные факты. "Искусство предположений" появилось после смерти автора и не было автором завершено. Сочинение состояло из 4 частей, комбинаторике была посвящена вторая часть, в которой содержатся формулы:

-для числа перестановок из *n* элементов

-для числа сочетаний (называемого Я. Бернулли классовым числом) без повторений и с повторениями,

-для числа размещений с повторениями и без повторений.

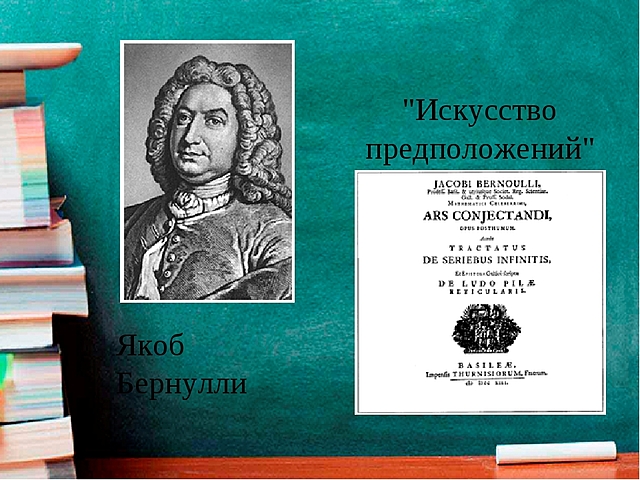


Рисунок 4

Комбинаторика, пройдя многовековой путь развития, обретя собственные методы исследования, с одной стороны, широко используется при решении задач алгебры, геометрии, анализа, с другой стороны, сама использует геометрические, аналитические и алгебраические методы исследования.

# Комбинаторные задачи и методы их решения

Слово «комбинаторика» произошло от латинского слова combinare - «соединять, сочетать».

Задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций, называются комбинаторными.

Комбинаторика - это раздел математики, в котором исследуются и решаются задачи выбора элементов из исходного множества и расположения их в некоторой комбинации, составляемой по заданным правилам [4].

## Составление комбинаций. Перебор вариантов.

Перечисление вариантов (полный перебор) осуществляется с помощью таблиц, графов (деревьев), либо заданием алгоритма, обеспечивающего получение всех возможных вариантов. Табличный и графический методы перебора, а также алгоритмы «ручного» перебора используются только при малых значениях *m* и *n.* Машинные алгоритмы перебора вариантов по мере развития вычислительной техники находят все более широкое применение. До настоящего времени они являются единственным средством решения некоторых комбинаторных задач.

Приведем примеры нескольких задач, решаемых вышеперечисленными способами.

## Перечисление перестановок.

Пример:

Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека - Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

Решение

Перечислим варианты пар, взяв первые буквы фамилий.

Все возможные варианты приведены ниже:

АГ, АС, АФ

ГС, ГФ

СФ

Ответ**:** значит, всего существует шесть вариантов выбора.

Пример:

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Решение

Чтобы ответить на вопрос задачи, выпишем все такие числа. Полученные результаты запишем в четыре строки, в каждой из которых шесть чисел:

135 137 153 157 173 175

315 317 351 357 371 375

513 517 531 537 571 573

713 715 731 735 751 753

Ответ: 24 числа.

## Дерево возможных вариантов.

Пример:

Рассмотрим предыдущий пример про трехзначные числа, но воспользуемся несколько иным способом решения.

Решение

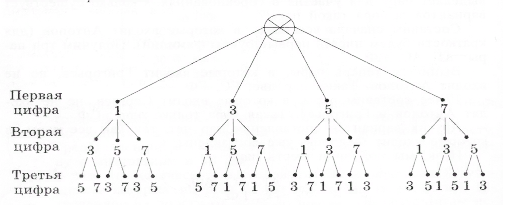


Рисунок 5

Поучили дерево вариантов. Его последний уровень и дает количество вариантов: 24.

Ответ: 24 варианта.

## Таблица.

Пример:

Монетку бросают 3 раза. Сколькими способами можно получить, чтобы в первый и третий раз выпала одна и та же сторона?

Решение

Выпадение орла обозначим буквой О, а решки буквой Р. Рассмотрим все возможные комбинации. Результат занесем в таблицу

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1** | **2** | **3** |
| О | О | О |
| О | О | Р |
| О | Р | О |
| О | Р | Р |
| Р | О | О |
| Р | Р | О |
| Р | О | Р |
| Р | Р | Р |

Таблица 4

Выберем из полученной таблицы строки, в которых в первый и последний столбец записаны одинаковые значения. Получили 4 способа.

Ответ: 4 способами можно получить, чтобы в первый и третий раз выпала одна и та же сторона.

## Графы.

Граф представляет собой непустое множество точек и множе­ство отрезков, оба конца которых принадлежат заданному множе­ству точек.

Точки иначе называют вершинами, отрезки — ребрами графа.

Полный граф – это граф со всеми возможными ребрами.

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина.

Вершина называется нечетной, если ее степень — число нечетное. Вершина называется четной, если ее степень — число четное [5].

Пример:

Пятеро ученых, участвовавших в научной конференции, обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Решение

Обозначим ученых вершинами графа и проведем от каждой вершины линии к четырем другим вершинам. Получаем 10 линий, которые и будут считаться рукопожатиями.

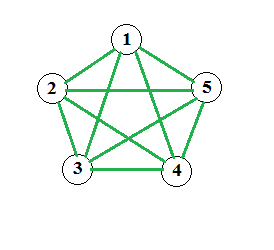


Рисунок 6

Ответ: 10 рукопожатий.

Пример:

Вася, Коля, Петя, Аня и Наташа - луч­шие лыжники в пятом классе. Для уча­стия в соревнованиях нужно выбрать из них одного мальчика и одну девоч­ку. Сколькими способами это можно сделать?

Решение

Эту задачу можно решить с помощью следующей схемы, обозначив имена детей их первыми буквами.

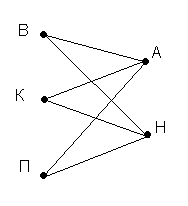


Рисунок 7

Ответ: 6 способов.

Пример:

Девять шахматистов проводят турнир в один круг (каждый из участников должен сыграть с каждым из осталь­ных по одному разу). Покажите, что в любой момент найдутся двое, закончившие одинаковое число партий.

Решение

Переведем условие задачи на язык графов. Каждому из шахматистов поставим в соответствие вершину графа, соединим ребрами попарно вершины, соответствующие шахматистам, уже сыгравшим между собой партию. Получим граф с девятью вер­шинами. Степени его вершин равняются числу партий, сыгранных соответствующими игроками. Покажем, что во всяком графе с девятью вершинами всегда найдутся хотя бы две вершины одинаковой степени.

Каждая вершина графа с девятью вершинами может иметь степень, равную 0, 1, 2,…,7, 8. Предположим, что существует граф Г, все вершины которого имеют разную степень, т. е. каждое из чисел последовательности 0, 1, 2,…,7, 8 является степенью одной и только одной из его вершин. Но этого не может быть. Действитель­но, если в графе есть вершина А степени 0, то в нем не найдется вер­шина В со степенью 8, так как эта вершина В должна быть соединена ребрами со всеми остальными вершинами графа, в том числе и с А. Иначе говоря, в графе с девятью вершинами не могут быть одновременно вершины степени 0 и 8. Следовательно, найдутся хотя бы две вершины, степени которых равны между собой.

Вернемся к задаче. Доказано, что в любой момент найдутся хотя бы двое, сыгравшие одинаковое число партий.

## Правила **сложения** и умножения.

Одними из важнейших правил комбинаторики являются правило суммы и правило произведения.

**Правило суммы.**

Пусть объект *A* выбирается *m* способами, а объект *B* выбирается *n* способами, тогда выбрать «либо *A* , либо *B* » можно *m+n* способами.

Закон сложения используется тогда, когда нужно выбрать только 1 элемент.

Чтобы использовать закон сложения:

1. нужно понять, каковы группы, из которых нужно выбрать 1 элемент;

2. нужно выяснить количество элементов в каждой группе;

3. нужно убедиться, что в различных группах, из которых выбирают элемент, нет одинаковых элементов [6].

Пример:

Вика должна выбрать только один десерт из 8 видов коктейля, 5 видов мороженого. Сколькими способами она может выбрать десерт?

Решение

Используется закон сложения, т. к. Вика должна выбрать или коктейль, или мороженое.

8+5=13.

Ответ: Вика может выбрать десерт 13 способами.

При использовании закона сложения надо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта *a* не совпадал с каким-либо способом выбора объекта *b*.  
Если такие совпадения есть, то закон сложения утрачивает силу, и мы получаем лишь (*m+n−k*) способов выбора, где *k* — число совпадений.

Итак: если объект A можно получить m способами, объект B — *n*  способами, то объект «A или B» можно получить *m+n−k* способами, где *k* — это количество повторяющихся способов.

Пример:

в группе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек — «5» по философии. В сессии 2 экзамена. Известно, что 4 человека сдали сессию отлично. Сколько человек имеет хотя бы одну пятерку в сессии?  
Решение

 7+9−4=12.

Ответ: 12 человек сдали сессию на «отлично».

Пример:

В классе учится 17 мальчиков и 8 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

Решение

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 17 мальчиков, либо любая из 8 девочек.

По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить 17+8=25 способами.

Ответ: 25 способов.

Для большего числа элементов имеем:

Если любые две группы *Аi* и *Aj* не имеют общих элементов, то выбор одного элемента или из *A1*, или из *A2*, …или из  *Ak*можно осуществить  *N=n1+n2+…+nk* способами.

Пример:

На полке 30 книг, из них 20 математических, 6 технических и 4 экономических. Сколько существует способов  выбора одной математической или одной экономической книги.

Решение

Математическая книга может быть выбрана   *n1=20* способами, экономическая - *n2=4* способами.

**Правило умножения.**

Пусть объект A выбирается m способами, а объект B выбирается n способами, тогда выбрать пару A и B можно *m*·*n* способами.

Используя правило произведения можно подсчитать количество способов выбора комбинаций из большего числа элементов.

Пусть требуется выполнить последовательно *k* действий. Если первое действие можно выполнить *n1* способами, второе действие *n2* способами, третье – *n3* способами и так до *k*-го действия, которое можно выполнить *nk* способами, то все *k* действий вместе могут быть выполнены: *N=n1·n2·…·nk*  способами [7].

Пример:

Сколькими способами можно распределить две различные путевки между тремя сотрудниками?

Решение

Две различные путевки между тремя сотрудниками можно распределить шестью способами. Действительно, первая путевка может достаться одному из трех сотрудников, т.е. существует три возможных исхода распределения первой путевки. Тогда вторая путевка может достаться одному из двух оставшихся сотрудников, т.е. существует два возможных исхода распределения второй путевки. Соответственно по правилу произведения две путевки между тремя сотрудниками можно распределить шестью способами.

Ответ: 6 способов.

Пример:

Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – три дороги , из города С до пристани - две дороги. Туристы хотят проехать из города А через В и С к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

Решение

2·3·2=12

Ответ: 12 способами

Рассмотрим чуть более сложный пример, в котором необходимо использовать и правило сложения, и правило умножения.

Пример:

В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий, зеленый и желтый цвета, причем были представлены все возможные варианты.

А) Сколько команд участвовало в турнире?

Б) У скольких команд футболки и трусы были разного цвета, причем трусы были не красные?

Решение

А) Количество команд равно количеству способа выбора двух цветов из 5 данных с учетом порядка (один цвет для футболки, другой для трусов). В условии указано, что необходимо рассмотреть все возможные варианты, то есть допускается, что футболка и трусы могут быть одинакового цвета. Поэтому цвет футболки можно выбрать 5 способами, цвет трусов также 5 способами. Всего возможно 5·5=25 вариантов формы, то есть в турнире участвовало 25 команд.

Б) Рассмотрим два взаимоисключающих случая:

1) Для футболки выбран не красный цвет

2) Для футболки выбран красный цвет

В первом случае есть 4 способа выбрать цвет футболки, а после этого 3 способа выбрать цвет трусов (кроме красного и цвета футболки), всего 4·3=12 способов.

Во втором случае цвет футболки фиксирован (красный), а цвет трусов можно выбрать 4 способами (кроме красного), т.е. всего есть 4 способа выбора формы.

По комбинаторному правилу суммы общее число способов выбора формы в этом случае равно 12+4=16 способов, т.е. у 16 команд футболки и трусы разного цвета, причем трусы - не красные.

Ответ: А) 25, Б) 16

Пример:

Сколько трехзначных чисел содержит ровно одну цифру 7?

Решение

Единственная цифра 7 может стоять либо на первом месте, либо на втором, либо на третьем. Находим количество чисел в каждом из этих случаев, после чего пользуемся правилом суммы.

Найдем количество *n1* трехзначных чисел, у которых единственная цифра 7 будет первой. На второй и третьей позиции может стоять любая из цифр, кроме 7. Следовательно, вторую и третью позицию мы можем заполнить 9·9=81 способами. Итак, *n1*=81.

Теперь найдем количество *n2*трехзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на втором месте. Первая цифра может быть любой, кроме 0 и 7 (то есть 8 способов выбора). Вторая цифра – любая, кроме 7 (это 9 способов). Следовательно, *n2*=8·9=72 способа. Аналогично находим количество n3 трехзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на третьем месте:

*n3*=8·9=72. По правилу суммы искомое количество чисел равно *n1 + n2 + n3*=81+72+72=225

Ответ: 225 трехзначных чисел содержит ровно одну цифру 7.

# Перестановки, размещения и сочетания без повторений.

Итак, напомним, что **комбинаторика** - это раздел математики, отвечающий на вопросы, сколькими способами можно выбрать элементы определенного множества, если выборка удовлетворяет некоторым свойствам.

Среди комбинаций попадаются те, которые должны удовлетворять достаточно общим условиям. В комбинаторике среди таковых выделяют комбинации, называемые перестановкой, размещением и сочетанием. Сначала остановимся подробнее на комбинациях без повторений, то есть составленных из элементов без повторений.

## Перестановки

Пример:

Представьте, что перед вами на столе лежат яблоко, груша и банан. Выкладываем фрукты слева направо в следующем порядке:

яблоко / груша / банан

Вопрос первый: сколькими способами их можно переставить?

Одна комбинация уже записана выше и с остальными проблем не возникает:

яблоко / банан / груша   
груша / яблоко / банан  
груша / банан / яблоко  
банан / яблоко / груша   
банан / груша / яблоко

**Итого:** 6 комбинаций или 6 **перестановок.**

**Перестановки -** это комбинации, составленные из всех n элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения.

Название тут говорит само за себя. Чтобы получить всевозможные перестановки некой совокупности объектов, нужно просто по очереди выставлять их в ряд в любом возможном порядке. Разные порядки предметов в ряду и будут перестановками.

В качестве примеров мы возьмём шары для бильярда.

Итак, пусть у нас есть *n* разных шаров. Сколько существует различных способов поставить их в ряд, то есть составить из них [упорядоченный набор](http://math.siomax.ru/Sets#definition:tuple)?

Обозначим это число способов через  *Pn* и начнём думать.

Предположим, что мы хотим как-то поставить шары, лежащие в урне, в ряд на полку. Изначально полка пуста, а в урне лежит *n* шаров. Будем по очереди доставать из урны шар и ставить на полку. На первом шаге у нас есть *n*  разных вариантов, какой шар достать и поставить. На втором шаге шаров в урне осталось *(n-1)*, и вариантов выбора шара тоже  *(n-1)*. И так далее; на *k*-м шаге у нас будет ровно *(n-k+1)* вариантов действий. Мы последовательно,  раз совершаем некий выбор; наше решение каждый раз не зависит от предыдущих решений — от них зависит только количество вариантов. Понятно, что общее число возможностей при этом равно произведению числа возможностей при каждом из независимых выборов, то есть в точности

*Pn= n*·*(n-1)*·*(n-2)*·*…*·*2*·*1=n!*

(Заметьте, что последний выбор оказывается «выбором» из одного варианта [8].)

Пример:

Сколькими способами можно расставить 3 различные книги на книжной полке?

Решение

Выбираем одну из трех книг и ставим на первое место. Это можно сделать тремя способами.

Вторую книгу мы можем выбрать из двух оставшихся двумя способами, получаем 3·2 способов.

Третью книгу мы можем выбрать 1 способом.

Получится 3·2·1=6 способов.

Ответ:6.

Пример:

Сколько различных шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что цифры в числе не повторяются?

Решение

Чтобы число было кратным 5, цифра 5 должна стоять на последнем месте. Остальные цифры могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое количество шестизначных чисел, кратных 5, равно числу перестановок из 5 элементов, т.е.

*P5*= 5!=1 ∙ 2 ∙ 3 ∙ 4 ∙ 5 = 120.

Ответ: 120.

Пример: Монету выбрасывают 8 раз. При этом получается некоторая последовательность «орлов» и «решек». Сколько всего существует таких последовательностей?

Решение

Пусть О означает, что выпал «орел», а Р – выпала «решка». Сколько восьмибуквенных слов можно составить из трех букв О и пяти букв Р? Заметим, что слово однозначно определяется выбором позиций для трех букв О (остальные автоматически заполняются буквами Р). Поэтому число наших слов есть число способов выбрать три позиции из восьми, то есть

Ответ: 56 последовательностей.

## Размещения

**Размещения** – комбинации из m элементов множества, содержащего n различных элементов, отличающихся либо составом элементов, либо их порядком.

Пусть у нас по-прежнему есть *n* шаров, только теперь мы хотим рассмотреть всевозможные перестановки не из всех них, а из какого-то меньшего количества *m:* . Такие всевозможные перестановки называются размещениями из *n* предметов по *m* . Попробуем подсчитать, сколько же их.

Всё становится немного сложнее из-за того, что у нас теперь два числа-параметра *n* и *m*, а не одно. Обозначим количество размещений из *n* по *m* знаком . Очевидно, что если *m=1*, то есть нужно выбрать один шар из *n* имеющихся, то : просто можно выбрать любой шар и остановиться на этом. Если два, то : выбираем первый шар из *n*  вариантов, а потом второй из оставшихся (*n-1)* вариантов. Вооружившись опытом предыдущего параграфа, мы можем сообразить, что так будет продолжаться и дальше: число вариантов будет уменьшаться, эти уменьшающиеся числа будут перемножаться. Соотношение для числа размещений будет выглядеть так:

Озвучить эту формулу можно так: «если, желая выбрать размещение *m* предметов из *n* имеющихся, достать один (было *n* разных способов сделать это), то остаётся выбрать размещение (*m-1)* предмета из (*n-1)* имеющихся».

Повторив с этой формулой те же логические действия, что и с предыдущей, приходим к итоговому выражению для числа размещений:

C факториалами эта формула записывается ещё лаконичнее:

Эта величина называется убывающим факториалом из*n* по *m*.

Как и в предыдущем параграфе, тут возможен другой ход рассуждений. Проведём рассуждение, объясняющее это загадочно возникшее деление факториалов друг на друга. Итак, нам нужны все размещения *m* предметов из  *n* возможных. Сначала возьмём всевозможные перестановки всех предметов; их, как мы уже знаем, *n!*. Теперь скажем, что первые  *m* предметов каждой перестановки — это и есть интересующие нас размещения. Всё хорошо, все возможные размещения получены, но они повторяются. В самом деле, достаточно посмотреть на картинку с перестановками шаров в начале соответствующего параграфа. Прикройте рукой третьи шары всех строк, и вы сможете найти две одинаковых строчки, то есть два совпадающих размещения.

К счастью, это не беда. Давайте подсчитаем, сколько раз нам встретилось в нашем методе каждое размещение! Возьмём какое-то одно. В нём  предметов. В правой части, которую мы отбросили, было ещё *(n-m)* предметов. Понятно, каких — тех, что не попали в первые *m*. Кроме того, поскольку мы брали всевозможные перестановки, то и эти *(n*-*m)* «аутсайдеров» побывают в отброшенной части, будучи переставленными всеми возможными способами. Таких способов ровно *Pn-m=(n-m)!*, потому что это просто перестановки *(n-m)* предметов. Значит, каждое размещение встретилось нам повторно ровно *(n-m)!*  раз (независимо от попавших в него предметов!).

Итого, у нас есть  *n!* размещений, среди которых по *(n-m)!*   копий каждого. Значит, для получения «чистого» количества размещений нужно получить общее число полученных на число копий:

Вот мы заодно и увидели, что в комбинаторике можно не только умножать, но и делить.

В завершение давайте испытаем нашу формулу на практике.

Одной из наиболее распространенных задач на этот вид комбинаций является задача на выбор старосты и его заместителя в классе.

Пример:

В классе из 27 учеников нужно выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Так как порядок учеников в паре староста-заместитель важен, то необходимо определить количество двухэлементных упорядоченных подмножеств двадцати семиэлементного множества, то есть *А* способа.

Ответ:702 способа

Пример:

В журнале «Моя жизнь» 12 страниц. Необходимо на страницах этого журнала разместить три фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одной странице журнала не должно находиться более одной фотографии?

Решение

В  данной  задаче мы не произвольно размещаем фотографии в журнал. Мы ограничены условием, что на каждой странице журнала должно находиться не более одной фотографии. Таким  образом,  задача сводится определению числа размещений без повторений из 12 элементов по 3 элемента:

Таким образом, 3 фотографии на 12 страницах можно расположить 1320 способами.

Ответ: 1320 способов [9].

## Сочетания

**Сочетания** – неупорядоченные наборы из m элементов множества, содержащего n различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов).

Будем всевозможными способами выбирать *m* предметов из *n* имеющихся, но теперь, в отличие от размещений, без учёта порядка. Каждый такой неупорядоченный набор из элементов и будет сочетанием.

Любое *m* - элементное подмножество заданного *n -* элементного множества называют сочетанием (комбинацией) из *n* элементов по *m* элементов.

Вычислим значение для нескольких частных случаев.

Поскольку существует *n* одноэлементных подмножеств заданного *n*-элементного множества, то *.* У данного *n*-элементного множества существует только одно *n*-элементное подмножество, поэтому . Так как заданное *n*-элементное множество имеет только одно подмножество, не содержащее ни одного элемента, то . Пустое множество содержит только одно подмножество, поэтому .

Обозначим число сочетаний знаком  и попробуем сразу же его вычислить. Возьмём всевозможные размещения *m*  предметов из  *n* имеющихся. Их, как мы уже знаем,. Если перестать обращать внимание на порядок, то мы получим всевозможные сочетания, но опять-таки они будут повторяться. Каждое сочетание повторяется среди всех размещений ровно *m!* раз. Для получения числа сочетаний остаётся поделить число размещений на этот факториал:

Эта формула справедлива и для *n*=0 и *m*=0.

То есть способов выбрать из  шаров немножко столько же, сколько и способов выбрать почти все. Разумно: ведь выбрать немножко — это всё равно, что выбросить почти все.

Для того, чтобы наглядно продемонстрировать, как решаются задачи на этот вид комбинаций, рассмотрим следующий пример.

Пример:

В классе из 27 учеников нужно выбрать двух дежурных. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

На первый взгляд условие мало чем отличается от условия задачи, рассмотренной в примере 1 предыдущего пункта. Но, на самом деле, если в паре староста-заместитель для ребят принципиально, кто будет старостой, а кто его замом, то в паре дежурный-дежурный оба ребенка равноправны, т.е. неважно, в каком порядке дети расположены в паре. То есть нужно определить количество двухэлементных подмножеств двадцати семиэлементного множества, то есть  способ.

Ответ:351 способ [10-12].

Пример:

Необходимо выбрать в подарок 4 из 10 имеющихся различных книг. Сколькими способами можно это сделать?

Решение

Из 10 книг нужно выбрать 4, причем порядок выбора не имеет значения. Таким образом, нужно найти число сочетаний из 10 элементов по 4:

способов.

Ответ: 210 способов.

## «**Фиксирование**» элементов

В некоторых задачах в условии указывается, что один или несколько элементов должны занимать определенное место в формируемой комбинации. В таких случаях мы уменьшаем количество элементов и количество мест на число "фиксированных" элементов и находим количество способов расположения оставшихся элементов на оставшихся местах. Найденное количество умножаем на число перестановок "фиксированных" элементов между собой на их местах.

Пример:  Сколько среди четырехзначных чисел (без повторения цифр), составленных из цифр 3, 5, 7, 9, таких, которые начинаются с цифры 3

Решение

Из цифр 3, 5, 7, 9 составим четырехзначные числа, начинающиеся с цифры 3.

Фиксируем цифру 3 на первом месте; тогда на трех оставшихся местах в произвольном порядке могут располагаться цифры 5, 7, 9. Общее количество вариантов их расположения равно 3= 3!=6. Столько и будет разных четырехзначных чисел, составленных из данных цифр и начинающихся с цифры 3.

Ответ: 6 вариантов

## «**Склеивание**» элементов

В других задачах требуется, чтобы два или более элементов в составляемой комбинации всегда стояли рядом. В таких случаях мы рассматриваем все эти элементы как один новый ("склеенный" из исходных элементов), и находим количество способов расположения оставшихся элементов на оставшихся местах. Найденное количество способов умножаем на число перестановок "склеенных" элементов между собой (в склейке).

Пример:Сколькими способами можно расставить 9 различных книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

Решение

Если обозначить 4 определенные книги как одно целое, то получается 6 книг, которые можно переставлять способами.

Четыре определенные книги можно переставлять способами.

Тогда по правилу умножения всего будет способов.

Ответ: 17280 способов.

# Перестановки размещения и сочетания с повторениями

## Перестановки с повторениями

**Определение** Последовательность длины n, составленная из m разных символов, первый из которых повторяется *k1* раз, второй - *k2* раз,…, *m*-й – *km*раз (где *n=k1+k2+…+km*), называется перестановкой с повторениями из n элементов.

Число различных перестановок с повторениями из m различных элементов *{a1,a2,…,am}*, в которых элементы *a1,a2,…,am* повторяются *k1,k2,…,km*раз и *n* – общее количество элементов, *n=k1+k2+…+km*, равно

Пример:

Сколькими способами можно собрать гирлянду из 4 красных, 4 синих и 8 желтых флажков?

Решение

У нас имеется *k1*=4 объекта первого типа (красные флажки), *k2*=4 объекта второго типа (синие флажки) и *k3*=8 объектов третьего типа (желтые флажки). Все эти *n*=4+4+8=16 флажков нужно развесить на веревке всеми возможными способами. Применяем формулу числа перестановок с повторениями:

способов.

Ответ: 900900 способов.

Пример:

Сколькими способами можно упорядочить множество *{1,2,…,2n}* так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение

Множество номеров чисел в перестановке можно разбить следующим образом: *.* Нам нужно, чтобы вторая группа этих номеров соответствовала четным числам, а значит первая – нечетным. Получаем, что число перестановок в первой группе равно *n!,* число перестановок во второй группе также *n!*. То есть общее число перестановок равно *(n!)2*.

## Размещения с повторениями

**Определение** Размещениес повторениями – это размещение элементов в предположении, что каждый элемент может участвовать в размещении несколько раз.

Число размещений с повторениями из n элементов по m выражается формулой

Пример:

Даны цифры 1;2;3;4. Сколько различных двузначных чисел из них можно составить, если цифры в числе могут повторяться?

Решение

Так как цифры в числе могут повторяться, нужно использовать формулу числа размещений с повторениями из n элементов по m, где *n*=4 (множество всех элементов), *m*=2 (т. к. нужно составить двузначные числа).

 чисел.

Ответ: из данных цифр можно составить 16 различных двузначных чисел.

Пример:

Сколько различных «слов» в 5 букв можно составить из 26 букв латинского алфавита.

Решение

Ответ:

Пример:

Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?

Решение

Порядок важен (шифр набирается в строгом порядке), повторения есть (цифры могут повторяться). Нужна формула размещения с повторениями . Считаем, что в шифр может входить любая из 10 цифр, всего 6 возможных позиций (длина шифра равна 6 цифрам). Подсчитаем общее число всех возможных комбинаций шифра. Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую – также 10 (цифры могут повторяться), и так далее для всех шести цифр шифра, то есть 6 *N* = 10·10·10·10·10·10·10. В терминах комбинаторики это размещения с повторениями из 10 объектов по 6:

Ответ: 1 000 000 [13].

## Сочетания с повторениями

**Определение** Сочетанием с повторениями называются наборы, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз [14].

Число сочетаний с повторениями из *n* элементов по *m* выражается формулой

Пример:

Сколько будет костей домино, если использовать в их образовании все цифры?

Решение

Число костей домино можно рассматривать как число сочетаний с повторениями по два из десяти. Число таких сочетаний равно:

Ответ: 55 костей.

Пример:

Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 5, 6, 7, 8, 9?

Решение

Данные стороны таковы, что любые три из них соответствуют правилу треугольника, т. е. каждая сторона меньше суммы двух других. Значит, любая комбинация из трех сторон образует треугольник. Здесь речь идет о числе сочетаний из 5 элементов по 3 с повторениями:

Ответ: 35

Пример:

Сколько всего чисел (не больше 100000) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Решение

Это задача о числе сочетаний из пяти цифр по одному, по два, по три, по четыре и по пяти с повторениями в каждом случае.

Поскольку , , , , , то существует 5+15+35+70+126=251 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 126 чисел.

Пример:

6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров

  а) так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

  б) если некоторые ящики могут оказаться пустыми?

Решение

  а) Выложим шары в ряд. Для определения расклада наших шаров по шести ящикам разделим ряд 5 перегородками на 6 групп: первая группа для первого ящика, вторая – для второго и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки шаров по ящикам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между 20 шарами – 19 промежутков). Поэтому число их возможных расположений равно .

  б) Рассмотрим ряд из 25 предметов: 20 шаров и 5 перегородок, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородки, во второй – расположенные между первой и второй перегородками и т. д. (между какими-то перегородками шаров может и не быть). Поэтому число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т.е. равно .

## Олимпиадная комбинаторика

Пример:

План города имеет вид прямоугольника  (см. Рис. 1). Его улицы идут строго параллельно сторонам. На каждом перекрестке водитель имеет право ехать либо вправо, либо вверх. Сколько существует различных маршрутов добраться из нижнего левого угла в правый верхний?

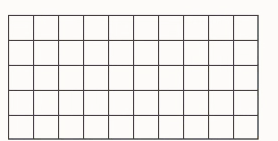


Рисунок 8

Решение

Движение водителя задается последовательностью движений вправо (П) и вверх (В). Например: если водитель использует схему движения, показанную на рисунке 2, то он 10 раз (10 клеточек) едет вправо (П), а затем 5 раз (5 клеточек) вверх (В):



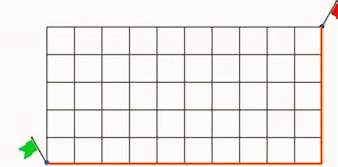


Рисунок 9

Если водитель использует схему движения, показанную на рисунке 3, то он едет 1 раз вверх (В), 1 раз вправо (П), 1 раз В, 1 П, 1 В, 1 П, 1 В, 1 П, 1 В, 6 П:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/292597/87a9e4d0_b070_0133_16ff_12313c0dade2.png

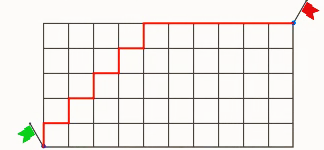


Рисунок 10

Таким образом, каждый маршрут водителя задается последовательностью из 15 символов В и П, при этом водитель каждый раз смещается на 10 единиц вправо и на 5 единиц вверх. Следовательно, из 15 символов 5 будут символами В, а 10 будут символами (П). Поэтому для решения задачи необходимо найти количество способов выбрать 5 мест из 15, в которых водитель поедет вверх. Это будет .

Ответ:  маршрутов.

Пример:

В стране есть 20 городов, которые соединены между собой 172 авиалиниями. Предположим, что между двумя городами есть только одна авиалиния. Докажите, что из любого города можно попасть в любой город, возможно, с пересадками.

Доказательство

Докажем от противного.

Предположим, что есть города Aи B такие, что из A нельзя долететь в B. Тогда какой бы мы ни взяли город C, одновременно существовать авиалинии A-C и B-C не могут (если существуют обе, можно долететь из A в B с пересадкой), и так для любого города из оставшихся 17 (см. Рис. 4).

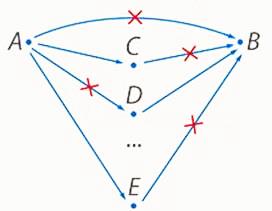


Рисунок 11

Следовательно, отсутствует авиалиния A-B и еще 18 авиалиний, которые связывают другие города либо с городом A, либо с городом B, то есть всего отсутствует 19 авиалиний.

В стране 20 городов, следовательно, всего теоретически возможно провести  авиалиний.

Тогда если из 190 возможных авиалиний 19 отсутствуют, то присутствует всего: 190 - 19=171 авиалиния

Однако это противоречит условию:

Следовательно, исходное предположение неверно, а из любого города можно попасть в любой.

Пример:

Докажите, что

Решение

Каждому *k*-элементному подмножеству A n-элементного множества M однозначно соответствует его дополнение, то есть *(n − k)-*элементное множество, состоящее из всех тех элементов, которые не входят в A. Поэтому число *k*-элементных подмножеств множества M равно числу его *(n − k)-*элементных подмножеств; но первое число есть , а второе равно *.* (Попросту говоря, выбрать *k* элементов — это всё равно, что выбрать *n−k* дополнительных элементов; поэтому число способов выбора первых равно числу способов выбора вторых.) Данное равенство можно доказать и алгебраически с помощью формулы (3):

Пример:

Тридцать школьников — семиклассников и восьмиклассников — обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый семиклассник пожал руку восьми восьмиклассникам, а каждый восьмиклассник пожал руку семи семиклассникам. Сколько было семиклассников и сколько восьмиклассников?

Решение

Пусть x — число семиклассников, y — число восьмиклассников; тогда x + y = 30. Второе уравнение мы получим, если подсчитаем двумя способами общее количество рукопожатий. С одной стороны, число рукопожатий равно 8x, поскольку от каждого семиклассника «исходит» 8 рукопожатий. С другой стороны, число рукопожатий равно 7y, так как от каждого восьмиклассника «исходит» 7 рукопожатий. Следовательно, 8x = 7y. Решая полученную систему уравнений, находим: x = 14, y = 16 [15].

Пример:

Было 7 пустых ящиков. В некоторые из них положили еще по 7 пустых ящиков и т. д. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?

Решение

Если ящик A лежит непосредственно в ящике B, то будем говорить, что из ящика A в ящик B идёт стрелка. Пусть всего стало x ящиков. Подсчитаем двумя способами общее количество стрелок. С одной стороны, оно равно x − 7, поскольку из каждого ящика, кроме начальных семи, выходит ровно одна стрелка. С другой стороны, число стрелок равно 10·7 = 70, поскольку в каждый из 10 непустых ящиков входит ровно 7 стрелок (а ни в какой пустой ящик стрелка не входит). Следовательно, x − 7 = 70, откуда x = 77. Данную задачу можно решить и по-другому. На каждом шаге процесса заполняется ровно один ящик — в него кладутся 7 ящиков. Поскольку вначале все ящики пусты, сделано 10 шагов, то есть добавлено 70 ящиков. Плюс семь начальных — итого 77 ящиков.

# 

# 

# Дидактический материал для контроля освоения курса

## Контрольные вопросы по теории

1. Комбинаторика отвечает на вопрос
2. какова частота массовых случайных явлений;
3. с какой вероятностью произойдет некоторое случайное событие;
4. сколько различных комбинаций можно составить из элементов данного множества.

1. Комбинации из m элементов множества, содержащего n различных элементов, отличающихся либо составом элементов, либо их порядком – это
2. Сочетание
3. Размещение
4. Перестановка
5. Количество сочетаний из n элементов по k вычисляют по формуле:
6. По формуле вычисляется:
7. Размещение с повторением
8. Размещение
9. Перестановка с повторением
10. Отрезки, соединяющие вершины графа называются
11. Ребрами
12. Звеньями
13. Сторонами
14. Сформулируйте правило произведения.
15. Сформулируйте правило суммы для нескольких элементов.
16. В некоторых задачах в условии указывается, что один или несколько элементов должны занимать определенное место в формируемой комбинации. Какой метод при этом применяется?
17. Склеивание
18. Фиксирование
19. Объединение
20. Что вычисляется по формуле
21. Перестановки
22. Размещения с повторениями
23. Сочетания с повторениями
24. Что означает выражение n!?
25. 1+2+3+…+n
26. n·n·n·…·n (n раз)
27. 1·2·3·…·n

**Ключи**

1.3

2.2

3.2

4.3

5.1

6. Пусть объект A выбирается m способами, а объект B выбирается n способами, тогда выбрать пару (A , B) в указанном порядке можно m⋅n способами.

7. Если любые две группы *Аi* и *Aj* не имеют общих элементов, то выбор одного элемента или из *A1*, или из *A2*, …или из  *Ak*можно осуществить  *N=n1+n2+…+nk* способами.

8.2

9.3

10.3

## 5.2. Задачи для **самостоятельного** решения [16-20]

1. В цветочный магазин завезли пять сортов роз, четыре сорта хризантем, герберы и два сорта лилий. Сколькими способами можно составить букет из этих цветов (каждый цветок может быть только одного сорта)?
2. К кухонному гарнитуру можно подобрать семь видов обоев, четыре вида плитки и три цвета пластика. Сколькими способами можно сделать ремонт на кухне: а) используя один из материалов; б) сочетая обои и плитку; в) сочетая плитку и пластик?
3. Сколько есть перестановок чисел 1, 2, 3, …, 9, в которых цифры 4 и 8 стоят на своих местах?
4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани пяти различных цветов? Решите эту задачу при условии, что одна полоса должна быть красной.
5. Имеется набор 16 карточек. На четырех из них написана буква «А», на четырех – буква «Б», на четырех – буква «В», и на четырех – буква «Г». Сколько различных комбинаций можно получить, выбирая из набора 4 карточки и располагая их в некотором порядке?
6. В классе 6 учеников, абсолютно не общающихся друг с другом. Учитель, для сплочения коллектива, в течение 20 дней приглашает на консультации троих из них так, чтобы компания ни разу не повторилась. Сколькими способами он может сделать это?
7. В зоомагазине продаются рыбки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 12 рыб?
8. Букеты составляются из 3 цветов. Всего имеется 5 видов, гармонирующих как по отдельности, так и в сочетании друг с другом. Сколько различных букетов можно составить?

## Тесты первого уровня

Вариант 1.

1. После проведения математического кружка 6 участников обменялись своими визитками. Сколько всего визиток перешло из рук в руки?

Варианты ответов

1. 15
2. 30
3. 36

Решение

Это задание можно выполнить с помощью графов. Обозначим участников вершинами графа.

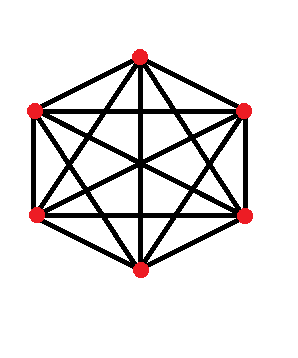


Рисунок 12

Всего у графа получилось 15 ребер. Так как дети обменивались визитками, то каждому ребру соответствует 2 передачи визиток. Следовательно, всего было передано 30 визиток.

Ответ: 30 визиток.

1. Сколькими способами можно раздать 5 разных фруктов 5 детям так, чтобы каждому ребенку досталось по одному фрукту?

Варианты ответов

1. 120
2. 25
3. 50

Решение

Первому ребенку может достаться любой из пяти фруктов. Второму - любой из оставшихся четырех. Третьему из трех, четвертому из двух, последний ребенок получит оставшийся фрукт. По правилу произведения получаем, что существует 5·4·3·2·1=120 возможных способов раздать фрукты детям.

Ответ: 120 способами.

1. В понедельник в 7 классе 6 уроков: математика, русский, литература, биология, география и история. Сколькими способами можно составить расписание, если известно, что последним уроком будет русский язык?

Варианты ответов

1. 720
2. 120
3. 36

Решение

Так как из шести уроков русский язык должен быть обязательно последним, то это единственный вариант постановки этого урока. Значит первым уроком может стоять любой из оставшихся пяти, вторым из четырех, третьим из трех, четвертым из двух, пятым - оставшийся один урок. Следовательно, существует 5·4·3·2·1·1=120 способов составить расписание.

Ответ: 120 способами.

1. В спортивной секции занимается 10 человек. Сколькими способами можно выбрать капитана команды и его заместителя?

Варианты ответов

1. 20
2. 45
3. 90

Решение

Для определения числа способов выбора капитана команды и его заместителя необходимо определить количество двухэлементных упорядоченных подмножеств десятиэлементного множества, то есть число размещений из 10 по 2:

способов

Ответ: 90 способами.

1. В меню столовой предложены 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих. Сколько различных вариантов обеда можно составить из первого, второго и третьего блюда?

Варианты ответов

1. 48
2. 96
3. 12

Решение

С каждым первым блюдом можно составить 6 вторых. Значит, из первых и вторых блюд можно составить 12 наборов. К каждому из 12 наборов можно добавить 4 набора из третьих блюд. Тогда наборов будет 12·4=48.

Ответ: 48 вариантов.

1. Сколько четных трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, если цифры в записи чисел не должны повторяться?

Варианты ответов

1. 24
2. 6
3. 12

Решение

Четными будут числа, оканчивающиеся на 4 или на 6. Поэтому подсчитаем количество вариантов, заканчивающихся на одну из этих цифр, а затем воспользуемся правилом сложения, чтобы определить общее число вариантов. Если число оканчивается четверкой, то на позициях сотен и десятков могут находиться любые 2 цифры из оставшихся трёх. Число размещений из 3 по 2 . Также получается, если число оканчивается 6-кой:  6. Общее число вариантов 6 + 6 = 12.

Ответ: 12 чисел.

1. . Сколько четных трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, если цифры в записи числа могут повторяться?

Варианты ответов

1. 24
2. 32
3. 16

Решение

Рассмотрим отдельно числа, заканчивающиеся четверкой и шестеркой, а затем воспользуемся правилом сложения вариантов. Пусть позиция единиц у нас занята цифрой 4. В этот раз в позиции десятков может стоять любая из четырёх заданных цифр (4 варианта) И в позиции сотен любая из этих же четырёх цифр (4 варианта), всего 4·4 = 16. Если число оканчивается на 6, теми же рассуждениями получаем еще 16 вариантов. Всего 16 + 16 = 32.

Ответ: 32 числа.

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. -6;5
2. -6
3. 5

Решение

ОДЗ: *; x+1>2; х>1*

Получаем или . Но - отрицательное, значит .

Ответ: .

1. 4 мальчика и 4 девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки с нечетными. Сколькими способами это можно сделать?

Варианты ответов

1. 16
2. 40 320
3. 576

Решение

Первый мальчик может сесть на любое из четырёх чётных мест, второй – на любое из оставшихся трёх мест, третий – на любое из оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения, мальчики могут занять 4 места 4·3·2·1=24 способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья 24·24=576 способами.

Ответ: 576 способами.

1. Из двух математиков и десяти экономистов нужно создать комиссию из 10 человек. Сколькими способами это можно сделать, если в комиссии должен быть хотя бы один математик?

Варианты ответов

1. 65
2. 900
3. 132

Решение

Рассмотрим два случая:

1. В комиссии будет один математик.

Существует 2 способа выбрать 1 математика из 2. Из 10 экономистов нужно выбрать 9 человек; количество способов выбрать из 10 человек 9 – это . Следовательно, всего способов:

Однако можно посчитать иначе: выбирать не 9 экономистов из 10, а выбрать 1 экономиста из 10, который не попадет в комиссию, то есть:

2. В комиссии будет более одного математика, то есть 2.

Существует 1 способ выбрать 2 математиков из 2. Оставшиеся восемь человек комиссии должны быть экономистами. Количество способов выбрать 10 человек 8 – это  . Следовательно, всего способов:

3. Складываем количество способов в первом и во втором случае:

20+45=65

Ответ: 65 способами.

## 5.4. Тесты второго уровня

Вариант 1

1. Сколько различных списков, отличающихся порядком фамилий, можно составить из семи различных фамилий, если фамилия Абрамов всегда должна стоять на первом месте?

Варианты ответов

1. 5 040
2. 720
3. 1024

Решение

Составим список фамилий, начинающийся с фамилии Абрамов. Фиксируем «Абрамов» на первом месте; тогда на шести оставшихся местах в произвольном порядке могут располагаться все остальные фамилии. Общее количество вариантов их расположения равно *Р6*= 6!=720. Столько и будет разных списков, составленных из данных фамилий и начинающихся с фамилии Абрамов.

Ответ: 720 вариантов

1. Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, если 2 определённые книги должны стоять рядом.

Варианты ответов

1. 10 080
2. 5 040
3. 2 520

Решение

Если 2 книги, которые должны стоять рядом считать за 1 книгу, то всего книг не 8, а 7. Тогда число возможных перестановок *Р7*=7! =5040. Две книги, которые всегда рядом, можно менять местами: Количество вариантов перестановки двух книг равно 2! =2·1=2. В итоге 7! ·2! =10 080

Ответ: всего 10 080 способов расставить книги на полках.

1. Сколько различных 5-значных чисел можно составить при перестановке цифр 2,2,3,3,5

Варианты ответов

1. 120
2. 256
3. 30

Решение

Ответ: 30 чисел

1. Сколько различных перестановок можно образовать изо всех букв слова «перестановка», начинающихся с буквы «п» и заканчивающихся буквой «а»?

Варианты ответов

1. 3\*11!
2. 5\*11!
3. 5\*9!

Решение

Чтобы посчитать количество перестановок, начинающихся с буквы «п» и заканчивающихся буквой «а», необходимо исключить эти элементы и места, на которых они стоят, из рассмотрения. Остается 10 букв и 10 мест, среди которых только одна повторяющаяся буква «е». Тогда

Ответ: 5\*9! вариантов

1. Сколько существует четырёхзначных ПИН-кодов?

Варианты ответов

1. 10 000
2. 100 000
3. 1 000

Решение

По условию нам предложен набор из 10 цифр, из которого выбираются 4 цифры и располагаются в определенном порядке, при этом цифры в выборке могут повторяться (т. е. любой цифрой исходного набора можно пользоваться произвольное количество раз). По формуле

количества размещений с повторениями:

Ответ: 10 000 ПИН-кодов

1. Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами).

Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

Варианты ответов

1. 1728
2. 1 726 272
3. 999

Решение

 способами можно составить цифровую комбинацию автомобильного номера, при этом одну из них (000) следует исключить:

  .  
  способами можно составить буквенную комбинацию автомобильного номера. По правилу умножения комбинаций, всего можно составить:  автомобильных номера (каждая цифровая комбинация сочетается с каждой буквенной комбинацией).

Ответ: 1 726 272

1. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравлений?

Варианты ответов

1. 293 930
2. 576 354
3. 66

Решение

По схеме получаем: *n*=10, *m=*12, порядок не важен, повторения есть. Нужна формула сочетаний с повторениями

Число способов купить 12 открыток равно числу выборок 12 (*m*) из 10 (*n*) элементов (видов открыток) без учета порядка с повторениями:

Ответ: 293 930 способами.

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. 5
2. 5;6
3. 6

Решение

ОДЗ:

Применяем формулы комбинаторики

Ответ: {5;6}.

1. Войсковое подразделение состоит из 5 офицеров, 8 сержантов и 70 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2 офицеров, 4 сержантов и 15 рядовых?

Варианты ответов

Решение

Из пяти офицеров выбрать двоих можно с помощью числа сочетаний   способами, из восьми сержантов четыре способами, из семидесяти рядовых пятнадцать . По правилу умножения находим число способов выбора отряда: .

Ответ: способами.

1. Вася забыл вторую и последнюю цифры пятизначного номера телефона приятеля. Какое наибольшее число звонков предстоит сделать Васе, если он решил перепробовать комбинации всех забытых цифр, чтобы в результате дозвониться до приятеля?

Варианты ответов

1. 90
2. 900
3. 100

Решение

Васе предстоит проверить 10 вариантов выбора второй цифры и 10 вариантов выбора пятой цифры телефонного номера; остальные цифры, известные Васе, на перебор никак не влияют. По правилу произведения наибольшее число вариантов номеров, которые предстоит проверить Васе, равно 100 вариантов.

Ответ: 100 вариантов

## 5.5. Тесты третьего уровня

Вариант 1

1. Каких чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

Варианты ответов

1. В которых 1 есть
2. В которых 1 нет
3. Поровну

Решение

Подсчитаем количество чисел от 1 до 999999 (число 1 000 000 содержит единицу, его сразу отбросим), в записи которых нет единиц. Каждую цифру можно выбрать 9 способами (любая цифра кроме 1), поэтому все 6 цифр (по правилу произведения) можно выбрать 96 способами (если в числе до значащих цифр стоят нули, мы их просто отбрасываем). При этом один вариант (000000) нужно убрать, так как число 0 не рассматривается. Получаем всего *N* = 96-1=531440 чисел. Так как всего чисел 1 000 000, то видно, что чисел без единицы среди чисел от 1 до 1 000 000 больше, чем тех, в записи которых единица есть.

Ответ: чисел без единицы больше, чем тех, в записи которых единица есть.

1. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

Варианты ответов

1. 60, 30
2. 60, 15
3. 30, 15

Решение

Различных дробей из 6 чисел: 3, 5, 7, 11, 13, 17 можно составить штук (способами выбираем два числа из 6, и двумя способами составляем из них дробь: сначала одно число – числитель, другое знаменатель и наоборот). Из этих 30 дробей ровно 15 будут правильные (т. е., когда числитель меньше знаменателя): способами выбираем два числа из 6, и единственным образом составляем дробь так, чтобы числитель был меньше знаменателя.

Ответ: 30; 15.

1. Сколько возможных рабочих коллективов специалистов можно составить, если на работу требуется 9 человек трех профессий так, чтобы по каждой профессии был хотя бы один специалист?

Варианты ответов

1. 28
2. 56
3. 256

Решение

Так как по каждой профессии должен быть хотя бы один специалист, то выбор трех из 9 работников уже определен (по одному специалисту каждой специальности) и может быть сделан единственным способом. Остается сделать выбор относительно специальностей для шести оставшихся, необходимых для работы. Учитывая, что по каждой специальности может быть несколько работников (или ни одного), получаем

Ответ: 28 коллективов.

1. Дано предложение: “Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком”. Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования.

Варианты ответов

1. 24
2. 23
3. 25

Решение

Нужно отметить, что в предложение обязательно входят подлежащее и сказуемое. Каждое из слов “улыбающийся”, “босиком” и словосочетание “на рыбалку” можно как включать, так и не включать в предложение, т. е. имеем 23=8 предложений. Добавив в каждое из них слово “утром”, получим еще 8 предложений, из которых можно получить еще 8 добавлением слова “ранним”. Так как среди этих 3⋅8 = 24 предложений есть еще и исходное, то всего можно составить 24–1 = 23 предложения.

Ответ: 23 предложения

1. Вася составляет 5-буквенные слова из четырехбуквенного алфавита {A, C, R, T}, причём буква А используется в каждом слове ровно 2 раза. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность пяти букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Варианты ответов

1. 200
2. 270
3. 10!

Решение

1. Пронумеруем позиции в слове, тогда варианты расположений букв «А» можно представить в качестве неупорядоченного выбора двух цифр из пяти. Значит, комбинаторная схема - [сочетания без повторений](http://informatics-lesson.ru/combinatorics/sample-without-repetitions.php)
2. остальные допустимые символы будут занимать 3 позиции. Эти выборки объемом 3 из 3 элементов будут отличаться как порядком следования, так и набором символов. Очевидно, комбинаторная схема – размещения с повторениями.
3. применим правило произведения: 27*·*10 = 270

Ответ: 270 слов.

1. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных без повторения, можно изобразить из букв слова «уравнение»?

Варианты ответов

1. 720
2. 360
3. 1440

Решение

В слове «уравнение» три согласных и четыре гласных буквы русского алфавита. Чтобы посчитать количество требуемых пятибуквенных слов, необходимо посчитать количество сочетаний трех согласных из трех заданных из трех заданных и двух гласных из четырех заданных: и . После того, как пять букв выбраны, необходимо посчитать все возможные перестановки этих букв:

Ответ: 720 слов.

1. На плоскости задано множество А, состоящее из 8 точек. Три из них выкрашены в красный цвет и лежат на одной прямой, а остальные расположены так, что проходящая через любую пару точек прямая не содержит других точек множества. Через каждые две точки множества А проведено по прямой линии. Сколько всего прямых линий получилось?

Варианты ответов

1. 24
2. 25
3. 26

Решение

Мы можем составить пар точек и провести через них прямые, но не все они будут различны. Из трех красных точек мы можем составить пар точек и все они определяют одну и ту же прямую. Поскольку все остальные пары точек образуют разные прямые, надо вычесть из общего числа пар все пары, образованные тремя красными точками, и компенсировать это вычитание добавкой единицы, так как одну прямую эти точки все-таки образуют:

Ответ: 26 прямых линий.

1. Решить уравнение:

Варианты ответов

1. -13, 8
2. 8
3. -13

Решение

Воспользуемся формулой

и представим правую часть в виде

Или

 откуда следует

Или

не подходит в качестве индекса.

Ответ:

# Заключение

Данная работа представляет собой электронный образовательный курс, в котором была рассмотрена тема «Комбинаторика». Образовательный процесс при дистанционном обучении базируется на самостоятельной работе детей. Многие учащиеся предпочитают электронную форму обучения в связи с тем, что они могут учиться в любое удобное для них время, в любом удобном месте, выбирать интересующие их курсы по различным направлениям и согласовывать контакт с преподавателем в процессе обучения.

Электронный образовательный курс «Комбинаторика» был апробирован в МАОУ «Физико-технический лицей № 1» города Саратова, в результате чего были реализованы следующие задачи: − изучен и проанализирован теоретический материал по данной теме; − определены методические особенности данной темы,− разработана тестовая система, дифференцированная по уровню сложности; − сокращено время, затрачиваемое на обработку результатов контроля, − повышена объективность результатов контроля.

В результате прохождения данного ЭОК учащиеся ознакомились с теорией по теме «Комбинаторика», подкрепленной примерами. выполнения тестовых заданий второго уровня наибольшие затруднения вызвали последние вопросы. Проведенные уроки показали, что дети, повторяя пройденный материал, гораздо лучше усвоили его, чем при первичном изучении. После прохождения перестановок, размещений и сочетаний с повторениями детям по-прежнему сложнее всего было отличить друг от друга сочетания и размещения, а также не всегда с первого раза удавалось определить, какое правило нужно применить в конкретной задаче: суммы или произведения, при комбинированном применении формул для перестановок, сочетаний и размещений. При решении комбинаторных уравнений основные ошибки остались теми же. Учащиеся регулярно забывают про область допустимых значений, а если накладывают ограничения, то, зачастую, учитывают не все условия, в результате чего выборка корней не производится совсем или производится неправильно. Пройденный материал был усвоен 97,6% учащихся. На все 10 вопросов верно ответили 20,1% учащихся. В ходе проведения уроков теоретический материал был усвоен в достаточной степени. Желательно увеличение объема практических заданий различных типов и различного уровня сложности. При решении тестов второго уровня порог не перешли два человека из 85.

Были получены профессиональные умения и опыт профессиональной деятельности посредством проведения уроков, подготовки планов уроков и тестовых материалов.

Данный ЭОК может использоваться как в общеобразовательных учебных заведениях, так и в школах с углубленным изучением математики и в средних профессиональных учебных заведениях. Теоретический материал систематизирован и расширен по сравнению с материалом школьных учебников. Решение задач по комбинаторике от простых к сложным позволяет справляться с практико-ориентированными стохастическими задачами. Данная тема содержит как применение стандартных рассуждений, так и творческий подход, и сулит немало открытий при ее изучении. Разработанный дидактический материал охватывает оба эти аспекта.

# Список **используемых источников**:

1. <https://studopedia.org/8-27327.html>
2. <https://infourok.ru/zanyatie-po-matematike-na-temu-binom-nyutona-kurs-1413463.html>
3. <https://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-po-matematike/matematika-3-chast-institut-mirovoi-ekonomiki-i-informatizatcii/15-model-dnk>
4. Сачков, В. Н. Комбинаторный анализ / В. Н. Сачков. — Москва: издательство [Советская Энциклопедия](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%88%D0%B0%D1%8F_%D0%A0%D0%BE%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%B9%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%8D%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D0%BF%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D1%8F_(%D0%B8%D0%B7%D0%B4%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE)), 1979. — Т. 2. — 1104 с.
5. Буркатовская, Ю. Б*.* Теория графов / Ю.Б. Буркатовская. — Томск: издательство Томского политехнического университета, 2014. — Т. 1. — 200 с.
6. <https://www.yaklass.ru/p/algebra/11-klass/nachalnye-svedeniia-kombinatoriki-9340/pravilo-summy-9342/re-e895b44a-cf83-4e02-9293-1fbf0e0496f0>
7. Окулов, С. М*.* Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие/ С.М. Окулов. — Москва: издательство БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 422 с.
8. <http://math.siomax.ru/Combinatorics.html>
9. Богословская, Н.М., Харитонов, И. Ю. Решение задач по комбинаторике: Методические указания для студентов всех форм обучения спец. НГТУ/ Н.М. Богословская, И. Ю. Харитонов. - Н. Новгород: издательство НГТУ, 2006. – 24с.
10. Виленкин, Н. Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей/Н.Я. Виленкин. - Москва: издательство «Просвещение», 1976. – 48с.
11. <https://pdnr.ru/a8782.html>
12. Захарова, Т.В., Панфёров, С.В. Задачи начального курса теории вероятностей: учеб. пособие / Т.В. Захарова, С.В. Панфёров. – Москва: издательство КУРС, 2018. – 64с.
13. Виноградов, И.М. Комбинаторный анализ/ И. М. Виноградов. — Москва: издательство «Просвещение» 1977. — Т. 2. — С. 974.
14. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика/ Р. Стенли — Москва: издательство Мир, 1990. – 70 с.
15. Яковлев, И. В. Комбинаторика для олимпиадников/ И.В Яковлев. – Москва: издательство МЦНМО, 2014. – 72с.
16. <http://mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html>
17. <http://mathematichka.ru/school/combinatorics/combination_problems.html>
18. [https://urok.1sept.ru/articles/551085 (системы](https://urok.1sept.ru/articles/551085%20(системы) в конце 3 теста)
19. Мерзляк, А. Г., Поляков, В.М. Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций/ А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва : издательство Вентана-Граф, 2016. – 368 с. : ил.
20. <https://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=189>

## 

## **Приложение** А

**Тесты первого уровня**

Вариант 2

1. Пятеро друзей сыграли между собой по одной партии в шахматы. Сколько всего партий было сыграно?

Варианты ответов

1. 20
2. 10
3. 25

Решение

Обозначим друзей вершинами графа и проведем от каждой вершины линии к четырем другим вершинам. Получаем 10 линий, которые и будут считаться шахматными партиями.

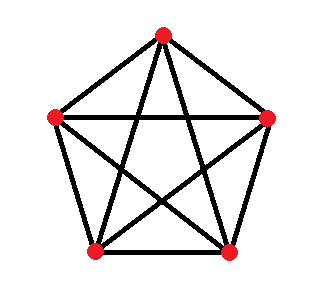


Рисунок 13

Ответ: 10 партий.

1. В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Варианты ответов

1. 2 160
2. 21
3. 5 040

Решение

На место водителя можно посадить только одного из трех человек, т.е. существует три способа занять первое место. Второе место может занять любой из шести человек, оставшихся после того, как место водителя будет занято. И так далее. Используя принцип умножения, получаем произведение:

3·6·5·4·3·2·1=2160 способов.

Ответ: 2160 способов.

1. Во дворце спорта работают секции по гимнастике, танцам, авиа моделированию и драмкружок. Сколькими способами можно составить расписание занятий на пятницу, если известно, что гимнастам в этот день зал нужен третьим по очереди?

Варианты ответов

1. 24
2. 16
3. 6

Решение

Так как на третьем занятии зал будет занят гимнастами, то на первое занятие его может получить любой из оставшихся трех кружков, на второе занятие любой из оставшихся двух и на четвертом занятии зал получит последний оставшийся кружок. Получается, что существует 3·2·1·1=6 способов составить расписание.

Ответ: 6 способами.

1. Сколькими способами можно выбрать из класса, насчитывающего 21 ученика, старосту, его заместителя и профорга?

Варианты ответов

1. 1 330
2. 7 980
3. 63

Решение

Для определения числа способов выбора старосты, его заместителя и профорга, необходимо определить количество трехэлементных упорядоченных подмножеств двадцати одногоэлементного множества, то есть число размещений из 21 по 3:

способов

Ответ: 7980 способами.

1. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

Варианты ответов

1. 16
2. 120
3. 140

Решение

Пару «пиджак-брюки» можно выбрать 7 · 5 способами. К этой паре можно купить галстук 4 способами. Следовательно, для покупки пиджака, брюк и галстука имеется 7 · 5 · 4 = 140 способов.

Ответ: 140 способами.

1. Сколько нечетных трёхзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 8, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться).

Варианты ответов

1. 6
2. 12
3. 24

Решение

Искомое число должно оканчиваться цифрой 3, так как 4, 6 и 8 являются нечетными, следовательно, и числа, заканчивающиеся на них, тоже нечетные. Поэтому позиция единиц у нас уже занята, и остается разместить 3 цифры на двух позициях - десятков и сотен. Число размещений из 3 по 2 определяем по формуле .

Ответ: 6 чисел.

1. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 7, 6, 5, 0, если цифры в записи числа не могут повторяться?

Варианты ответов

1. 36
2. 18
3. 9

Решение

Сначала определим, сколько всего можно составить групп из четырёх заданных цифр по 3 с учётом порядка следования и без повторений. . Но не все эти группы будут трёхзначными числами. Те из них, которые начинаются с цифры 0, считаться не будут. Если на первом месте стоит 0, то на позициях десятков и единиц располагаются 2 цифры из оставшихся трёх. Определяем число размещений из 3 по 2 . Вычитая из общего числа вариантов лишние, получим 24 - 6 = 18.

Ответ: 18 чисел.

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. -6;0;9
2. -6;9
3. 9

Решение

ОДЗ: *х* – натуральное число, не меньшее трёх.

или

Итак, получаем,

или или .

С учетом ОДЗ получаем, что .

Ответ:

1. Сколькими способами можно расставить на полке 7 книг, если две определенные книги должны всегда стоять рядом?

Варианты ответов

1. 840
2. 1440
3. 49

Решение

Книги, которые должны стоять рядом, считаем за одну. Тогда нужно расставить по местам 6 книг. По формуле перестановок *Р6=6!.* Теперь нужно учесть, что эти две «склеенные» книги можно поменять местами между собой, и в таком варианте 6 книг можно расставить по местам *Р6=6!* способами. Окончательно получаем, что имеется 2·6!=1440 способов расставить на полке 7 книг, если две определенные книги должны всегда стоять рядом.

Ответ: 1440 способами.

1. В ящике находится 20 деталей. Известно, что 5 из них являются стандартными. Из этих деталей выбирают три. Сколько существует способов выбора трех деталей таких, чтобы среди них была, по крайней мере, одна стандартная?

Варианты ответов

1. 150
2. 685
3. 525

Решение

Всего существуетспособов выбора трех деталей из 20. Среди них троек содержит только нестандартные детали. Поэтому троек, среди которых будет хоть одна стандартная деталь равно - =685

Ответ: 685 способов.

Вариант 3

1. На психологическом семинаре каждый из 7 участников должен был сказать всем остальным комплимент. Сколько всего комплиментов произнесли участники семинара?

Варианты ответов

1. 21
2. 42
3. 49

Решение

Обозначим участников семинара вершинами графа и проведем от каждой вершины линии к шести другим вершинам. Получаем 21 линию, которые и будут считаться количеством пар. А так как в каждой паре комплимент произносят оба участника, то их общее количество составит 21·2=42 комплимента.

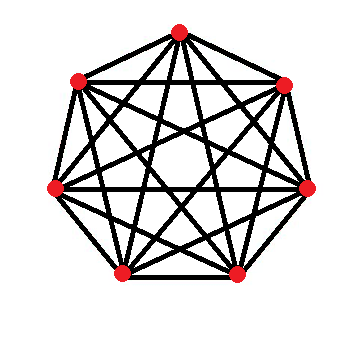


Рисунок 14

Ответ: 42 комплимента.

1. Сколькими способами можно рассадить на детской площадке шестеро детей в шесть разных машинок?

Варианты ответов

1. 36
2. 720
3. 360

Решение

В первую машинку может сесть любой из шестерых детей. Во вторую – любой из оставшихся пятерых, и т.д. В шестую машинку сядет последний ребенок. По правилу умножения общее количество способов рассадить детей по машинам будет равно 6·5·4·3·2·1=720.

Ответ: 720 способами.

1. Мама приготовила Алёше на обед первое, второе, третье блюдо и пирожное. Алёша обязательно начнет с пирожного, а все остальное съест в произвольном порядке. Найдите число возможных вариантов обеда.

Варианты ответов

1. 6
2. 24
3. 16

Решение

У Алёши есть единственный возможный вариант первого блюда. Это пирожное. Значит, вторым по очереди он может съесть любое из оставшихся трех блюд, третьим – любое из оставшихся двух, четвертым – последнее блюдо. То есть число возможных вариантов обеда по правилу умножения равно 1·3·2·1=6.

Ответ: 6 вариантов.

1. В 8 классе изучают 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на субботу, если в этот день должно быть пять разных уроков?

Варианты ответов

1. 70
2. 2 002
3. 240 240

Решение

Различных способов составления расписания столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств у четырнадцати элементного множества. То есть число способов равно числу размещений из 14 элементов по 5: способов.

Ответ: 240240 способами.

1. В пенале у первоклассника должны лежать ручка и карандаш. В магазине нашлось 4 подходящих пенала, 5 различных ручек и 8 видов карандашей. Сколькими способами можно собрать набор из пенала, ручки и карандаша ребенку в школу?

Варианты ответов

1. 160
2. 17
3. 72

Решение

С каждым пеналом можно взять любую из пяти различных ручек, то есть получится 4·5=20 пар. К каждой из этих двадцати пар можно добавить 8 видов карандашей. Тогда наборов будет 20·8=160.

Ответ: 160 способами.

1. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5 при условии, что цифры в числах не повторяются?

Варианты ответов

1. 120
2. 216
3. 108

Решение

Чтобы число было кратно 5, оно должно заканчиваться на 0 или на 5. Если последняя цифра 0, то остальные пять цифр можно располагать в любом порядке. Следовательно, шестизначных чисел, которые заканчиваются цифрой 0, столько, сколько можно сделать перестановок Р5. Если последней цифрой числа является 5, то остальные пять цифр можно расположить Р5 способами, но их этих способов не подходят те, где на первом месте цифра 0. Значит, количество чисел, кратных 5 и оканчивающихся на 5, равно *Р5* – *Р4*. Всего имеется *Р5+(Р5*–*Р4)*=216 пятизначных чисел, кратных 5.

Ответ: 216 чисел.

1. В ящике 100 деталей. Из них 30 деталей первого сорта, 50 – второго, остальные – третьего. Сколько существует способов извлечения одной детали первого или второго сорта?

Варианты ответов

1. 3 000
2. 80
3. 130

Решение

Деталь 1-ого сорта может быть извлечена *n1*=30 способами, 2-ого сорта *n2*=50 способами. По правилу суммы существует *n=n1+n2=*30+50=80 способов извлечения одной детали первого или второго сорта.

Ответ: 80 способов.

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. 0;7
2. 0
3. 7

Решение

ОДЗ:

или

С учетом ОДЗ получаем, что

Ответ:

1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить с помощью цифр 1,3,7 (Цифры могут повторяться)?

Варианты ответов

1. 27
2. 54
3. 6

Решение

Так как цифры в записи числа могут повторяться, то на всех трех местах может стоять любая из трех цифр. Значит по правилу умножения всего возможно 3·3·3=27 вариантов.

Ответ: 27 чисел.

1. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из пяти согласных и двух гласных, можно составить из букв слова УРАВНЕНИЕ?

Варианты ответов

1. 720
2. 12
3. 150

Решение

В слове уравнение 3 согласных и 4 гласных буквы русского алфавита. Чтобы посчитать количество требуемых пятибуквенных слов, необходимо посчитать количество сочетаний 3 согласных из 3-х заданных и двух гласных из четырех заданных: . После того, как 5 букв выбраны, необходимо посчитать все возможные перестановки этих букв:

Ответ: 720 слов.

Вариант 4

1. Андрей, Борис, Виктор и Григорий подарили на память друг другу свои фотографии. Причём каждый мальчик подарил каждому из своих друзей по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?

Варианты ответов

1. 18
2. 6
3. 12

Решение

Пусть мальчики будут являться вершинами графа. Проведем от каждой вершины линии к трем другим вершинам. Получаем 6 линий, которые и будут обозначать одну пару ребят. Так как в каждой паре было подарено 2 фотографии, то получается, что всего было подарено 2·6=12 фотографий.

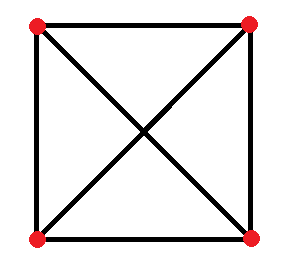


Рисунок 15

Ответ: 12 фотографий.

1. Сколькими способами можно распределить три призовых места на троих человек?

Варианты ответов

1. 9
2. 6
3. 12

Решение

Первое место может занять любой из троих человек, второе – любой из оставшихся двоих, третье место займет последний оставшийся человек. Таким образом, всего возможно 3·2·1=6 вариантов распределения призовых мест.

Ответ: 6 способами.

1. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли рядом?

Варианты ответов

1. 240
2. 120
3. 360

Решение

Всего в расписании 6 уроков, из них два урока математики должны стоять рядом. «Склеиваем» два элемента (алгебра и геометрия) сначала в порядке АГ, затем в порядке ГА. При каждом варианте «склеивания» получаем *Р5* = 5! = 120 вариантов расписания. Общее число способов составить расписание равно120 +120 = 240 способов.

Ответ: 240 способами.

1. Сколькими способами можно расставить 5 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии семи книг?

Варианты ответов

1. 2520
2. 42
3. 35

Решение

Различных способов размещения книг столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств у семиэлементного множества. То есть число способов равно числу размещений из 7 элементов по 5: способов.

Ответ: 2520 способами.

1. У Кати есть 6 ручек, 3 карандаша и 4 тетради. Сколькими способами Катя может взять с собой в школу ручку, карандаш и тетрадь?

Варианты ответов

1. 13
2. 36
3. 72

Решение

С каждой ручкой Катя может взять любой из трех карандашей, то есть получится 6·3=18 пар «ручка-карандаш». К каждой из этих восемнадцати пар можно добавить любую из 4 видов тетрадей. Тогда наборов будет 18·4=72.

Ответ: 72 способами.

1. Сколько среди четырехзначных чисел (без повторения цифр), составленных из цифр 3, 5, 7, 9, таких, которые начинаются с цифры 3?

Варианты ответов

1. 24
2. 72
3. 6

Решение

Из цифр 3, 5, 7, 9 составляем четырехзначные числа, начинающиеся с цифры 3. Фиксируем цифру 3 на первом месте; тогда на трех оставшихся местах в произвольном порядке могут располагаться цифры 5, 7 9. Общее количество вариантов их расположения равно *Р3*= 3!=6. Столько и будет разных четырехзначных чисел, составленных из данных цифр и начинающихся с цифры 3.

Ответ: 6 чисел.

1. В ящике 15 деталей, среди которых 6 бракованных. Наугад выбирается комплект из 5 деталей. Сколькими способами можно составить такой комплект, в котором 2 детали бракованные?

Варианты ответов

1. 90
2. 1 260
3. 2 520

Решение

Две бракованные детали из шести можно выбрать способами. Тогда остается выбрать три исправные детали из оставшихся 9 небракованных. Это можно сделать способами. Тогда по правилу умножения количество комбинаций нужного комплекта будет равно

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. 0;1;3;14
2. 0;1
3. 3;14

Решение

ОДЗ: *; х>3*

или или или

С учетом ОДЗ получаем, что или

Ответ: 3; 14.

1. Пять мальчиков и четыре девочки хотят сесть на девятиместную скамейку так, чтобы каждая девочка сидела между двумя мальчиками. Сколькими способами они могут это сделать?

Варианты ответов

1. 2 880
2. 362 880
3. 45

Решение

По условию задачи мальчики и девочки должны чередоваться, т. е. девочки могут сидеть только на четных местах, а мальчики - только на нечетных. Поэтому меняться местами девочки могут только с девочками, а мальчики - только с мальчиками. Четырех девочек можно рассадить на четырех четных местах *Р4* = 4! = 24 способами, а пятерых мальчиков на пяти нечетных местах *Р5* = 5! = 120 способами.

Каждый способ размещения девочек может сочетаться с каждым способом размещения мальчиков, поэтому по правилу произведения общее число способов равно: *Р4*· *Р5* =24·120= 2 880 способов.

Ответ: 2880 способами.

1. В рабочей бригаде среди 15 рабочих 8 маляров. Сколькими способами можно составить бригаду из 6 человек, чтобы в ней было ровно 2 маляра?

Варианты ответов

1. 1 960
2. 980
3. 360

Решение

Из восьми маляров можно выбрать двоих способами. Оставшиеся 4 человека будут выбираться из 7 рабочих, которые не являются малярами. Это можно будет сделать способами. По правилу произведения получаем, что составить бригаду из 6 человек, чтобы в ней было ровно 2 маляра, можно способами.

Ответ: 980 способами.

Вариант 5

1. После возвращения из пионерского лагеря 8 ребят из отряда обменялись друг с другом письмами. Сколько всего писем было отправлено?

Варианты ответов

1. 64
2. 28
3. 56

Решение

Пусть ребята будут являться вершинами графа. Проведем от каждой вершины линии к семи другим вершинам. Получаем 28 линий, которые и будут обозначать одну пару ребят. Так как в каждой паре было отправлено 2 письма, то получается, что всего было отправлено 2·28=56 писем.

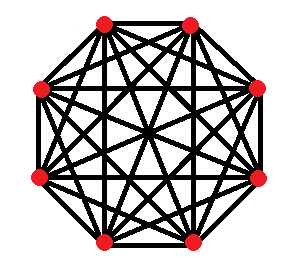


Рисунок 16

Ответ: 56 писем.

1. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трёх горизонтальных полос разных цветов – белый, синий, красный. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

Варианты ответов

1. 9
2. 6
3. 12

Решение

На первом месте может оказаться любой из трёх цветов, на втором – любой из оставшихся двух, на третьем месте будет последний цвет. Таким образом, всего возможно 3·2·1=6 вариантов сочетаний цветов на флаге, т.е. такую символику могут использовать 6 стран.

Ответ: 6 стран

1. В школьной столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд, если на второе обязательно выбрать курицу с рисом?

Варианты ответов

1. 18
2. 9
3. 6

Решение

Вариантов первого блюда всего три, на второе выбирается один вариант, вариантов третьего блюда два. Значит, по правилу умножения всего возможно 3·1·2=6 различных способов выбрать обед.

Ответ: 6 различных обедов.

1. У Ани четыре разных платья и три разных пары туфель. Собираясь на вечеринку, она думает, что бы ей надеть. Сколько всего у Ани вариантов?

Варианты ответов

1. 24
2. 12
3. 7

Решение

Предположим, что платье Аня уже выбрала. К этому платью она может надеть любую из трёх пар туфель. Таким образом, существует 3 набора «платье-туфли», содержащих фиксированное платье. Поскольку платьев имеется 4, то у Ани возникает 4·3=12 вариантов выбора наряда на вечеринку.

Ответ: 12 вариантов.

1. В меню столовой указано 5 закусок, 3 первых блюда, 4 вторых и 3 десерта. Каким числом способов можно заказать обед из четырех блюд?

Варианты ответов

1. 15
2. 360
3. 180

Решение

 Закуску выбираем 5 способами, первое блюдо – 3 способами, второе блюдо – 4 способами, десерт – 3 способами. Всего 5·3·4·3 =180 способов заказать обед.

Ответ: 180 способов.

1. Сколько среди четырехзначных чисел (без повторения цифр), составленных из цифр 3, 5, 7, 9, таких, которые кратны 15?

Варианты ответов

1. 6
2. 24
3. 12

Решение

Заметим, что сумма данных цифр 3 + 5 + 7 + 9 = 24 делится на 3, следовательно, любое четырехзначное число, составленное из этих цифр, делится на 3. Для того, чтобы некоторые из этих чисел делились на 15, необходимо, чтобы они заканчивались цифрой 5.

Фиксируем цифру 5 на последнем месте; остальные 3 цифры можно разместить на трех местах перед 5 *Р3* = 3! = 6 различными способами. Столько и будет разных четырехзначных чисел, составленных из данных цифр, которые делятся на 15.

Ответ: 6 чисел.

1. Сколько можно составить пятизначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в которых цифры 4 и 5 стоят рядом (цифры не повторяются)?

Варианты ответов

1. 24
2. 48
3. 96

Решение

«Склеиваем» цифры 4 и 5 и находим число способов размещения четырех элементов (один из них склеенный) на четырех местах: 4·3·2·1=24. Цифры 4 и 5 можно переставить между собой двумя способами, поэтому общее число пятизначных чисел равно 2·24=48.

Ответ: 48 чисел.

1. Решите уравнение

Варианты ответов

1. 7;3,5
2. 3,5
3. 7

Решение

ОДЗ: *; х>3*

или

или

С учётом ОДЗ получаем

Ответ:.

1. Из семи разноцветных карточек разрезной азбуки составлено слово КОЛОКОЛ. Ребенок, не умеющий читать, случайно рассыпал эти карточки. Сколькими способами из этих карточек он может снова составить слово КОЛОКОЛ?

Варианты ответов

1. 24
2. 5 040
3. 49

Решение

На карточках имеется три буквы «о», две буквы «к», две буквы «л». Поэтому первая буква слова «колокол» может быть выбрана двумя способами, вторая – тремя способами, третья – двумя способами. При уже выбранных первых трех буквах четвертая может быть выбрана еще двумя способами (поскольку одна буква «о» уже выбрана). Остальные буквы могут быть выбраны только одним способом. Таким образом, ответ равен произведению чисел 3·2·2·2=24.

Ответ: 24 способами.

1. Для лотереи подготовили 20 билетов, из которых 9 - выигрышные. Один человек наугад выбирает 4 билетов. Сколько существует вариантов, при которых он выбирает ровно 2 выигрышных билета?

Варианты ответов

1. 900
2. 1 980
3. 188

Решение

Из девяти выигрышных билетов можно выбрать два способами. Оставшиеся два билета будут выбираться из одиннадцати невыигрышных. Это можно будет сделать способами. По правилу произведения получаем, что выбирать ровно 2 выигрышных билетов из 4 можно способами.

Ответ: 1980 вариантов.

**Ключи**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ВАРИАНТ** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **№ВОПРОСА** |
| **1** | **b** | **b** | **b** | **c** | **c** |
| **2** | **a** | **a** | **b** | **b** | **b** |
| **3** | **b** | **с** | **a** | **a** | **c** |
| **4** | **c** | **b** | **c** | **a** | **b** |
| **5** | **a** | **c** | **a** | **c** | **c** |
| **6** | **c** | **a** | **b** | **c** | **a** |
| **7** | **b** | **b** | **b** | **b** | **b** |
| **8** | **c** | **c** | **c** | **c** | **c** |
| **9** | **c** | **b** | **a** | **a** | **a** |
| **10** | **a** | **b** | **a** | **b** | **b** |

## 

Таблица 5

**Тесты второго уровня**

Вариант 2

1. Порядок выступления пяти участников конкурса, среди которых есть один ребенок, определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки возможно, если ребенок должен выступать последним?

Варианты ответов

1. 24
2. 120
3. 280

Решение

Определим порядок выступления.

Фиксируем ребенка на последнем месте; тогда на четырех оставшихся местах в произвольном порядке могут располагаться все остальные 4 человека. Общее количество вариантов их расположения равно *Р4*= 4!=24. Столько и будет разных вариантов жеребьевки.

Ответ: 24 варианта

1. Сколько существует шестизначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 таких, что цифры 2 и 3 всегда стоят рядом? (Цифры в записи числа не повторяются)

Варианты ответов

1. 720
2. 120
3. 240

Решение

Примем 23 за одну цифру. Тогда возможное число перестановок составит *Р5*= 5!=120 вариантов. Цифры 2 и 3 можно менять между собой местами *Р2*= 2! =2 способами. То есть всего существует 5!·2!=240 шестизначных чисел, удовлетворяющих заданным условиям.

Ответ: 240 вариантов

1. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «МАТЕМАТИКА»

Варианты ответов

1. 2 116 800
2. 151 200
3. 720

Решение

В слове МАТЕМАТИКА 10 букв, из которых буква «М» встречается 2 раза, буква «А» 3 раза, буква «Т» 2 раза, остальные три буквы по одному разу, следовательно,

Ответ: 151 200 слов.

1. Сколько перестановок можно получить из букв слова «комиссия»¸ начинающихся с первой буквы слова и заканчивающихся последней?

Варианты ответов

1. 720
2. 1440
3. 180

Решение

Чтобы посчитать количество перестановок, начинающихся с буквы «к» и заканчивающихся буквой «я», необходимо исключить эти элементы и места, на которых они стоят, из рассмотрения. Остается 6 букв и 6 мест, среди которых только одна повторяющаяся буква «с» и одна повторяющаяся буква «и». Тогда

.

Ответ: 180 перестановок.

1. Сколько пятизначных чисел мы можем получить из цифр 2,4,9?

Варианты ответов

1. 120
2. 243
3. 256

Решение

Нам нужно получить пятизначные числа, тогда как даны 3 цифры, значит, мы будем вычислять число размещений с повторениями:

.

Ответ. 243 числа.

1. Буквы азбуки Морзе состоят из символов – точка и тире. Сколько букв получим, если потребуем, чтобы каждая буква состояла не более чем из пяти указанных символов?

Варианты ответов

1. 62
2. 32
3. 64

Решение.

Число всех букв, каждая из которых записывается одним символом, равно  .

Число всех букв, каждая из которых записывается двумя символами, равно .

Число всех букв, каждая из которых записывается тремя символами, равно

Число всех букв, каждая из которых записывается четырьмя символами, равно .

Число всех букв, каждая из которых записывается пятью символами, .

Число всех указанных букв будет равно 62.

Ответ: 62 буквы

1. В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

Варианты ответов

1. 55
2. 84
3. 120

Решение

В задаче требуется найти число всевозможных групп по 9 элементов, которые можно составить из данных трех различных элементов, причем указанные элементы в каждой группе могут повторяться, а сами группы отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Это задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из трех элементов по девять. Следовательно, .

Ответ: 55 способами.

1. Решить уравнение

Варианты ответов:

1. -6; 3
2. -6
3. 3

Решение

ОДЗ:

Подставим эти выражения в уравнение:

или

С учётом ОДЗ получаем, что

Ответ:.

1. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

Варианты ответов

1. 52 920
2. 167
3. 256

Решение

Из шести изумрудов три он может выбрать  способами, из девяти алмазов пять - , из семи сапфиров два -  . По правилу умножения находим число вариантов 20·126·21=**52920**

Ответ: 52920 способов

1. Автомобильный номер состоит из 5 цифр (из такого набора: (0,1, 2…,9)) и двух букв. В соединении из букв для номеров автомобилей, какие зарегистрированы в Московской области, на первом месте стоит буква А, а на втором месте одна из букв А, Б. В, И. К, Н. Сколько автомобильных номеров можно составить в области?

Варианты ответов

1. 10 000
2. 100 000
3. 1000 000

**Решение**

Числовая часть номера – одно из размещений из *n*=10 по m=5 с повторениями. Их количество:

Из них необходимо исключить размещение 000-00, так как такой номер не используется, то есть, всех числовых соединений будет: .

Количество соединения букв 7. Первая буква фиксированная, тогда остаётся шесть. Общее число всех автомобильных номеров при изложенной системе равняется: .

**Ответ:** Автомобильных номеров в одной области можно составить по числам – 99 999, а по буквам – 599994.

Вариант 3

1. В автомобиле 6 мест. Сколькими способами 6 человек могут усесться в автомобиль, если на место водителя может сесть только один из них?

Варианты ответов

1. 720
2. 120
3. 240

Решение

Если место водителя может занять только один человек, то оставшиеся 5 человек могут сесть *Р5*= 5! =120 различными способами.

Ответ: 120 вариантов

1. В рюкзак нужно положить 7 тетрадей. Причем 2 конкретные из них обязательно должны лежать рядом. Сколькими способами это можно сделать?

Варианты ответов

1. 1 440
2. 720
3. 512

Решение

Если 2 тетради, которые должны быть рядом, считать за одну, то всего получается 6 тетрадей. Тогда число возможных перестановок *Р6*=6! =720. Две тетради, которые всегда должны быть рядом, можно менять местами. Количество вариантов перестановки 2-х тетрадей равно 2! =2·1=2. В итоге 6! ·2! =1 440 способов

Ответ: всего 1 440 способов положить тетради в рюкзак.

1. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить перестановкой карточек со следующими буквами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?

Варианты ответов

1. 39 916 800
2. 554 400
3. 1 440

Решение

Здесь имеют место перестановки с повторениями. Всего у нас 11 карточек, среди которых буква:

К – повторяется 3 раза;  
О – повторяется 3 раза;  
Л – повторяется 2 раза;  
Ь – повторяется 1 раз;  
Ч – повторяется 1 раз;  
И – повторяется 1 раз.

Контроль: 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11.

По **формуле количества перестановок с повторениями:**

 различных слов (буквосочетаний) можно получить.

Ответ: 544 400 слов

1. Сколько перестановок можно получить из букв слова «карандаш» ¸ начинающихся с первой буквы слова и заканчивающихся последней?

Варианты ответов

1. 720
2. 1024
3. 120

Решение

Чтобы посчитать количество перестановок, начинающихся с буквы «к» и заканчивающихся буквой «ш», необходимо исключить эти элементы и места, на которых они стоят, из рассмотрения. Остается 6 букв и 6 мест, среди которых только одна повторяющаяся буква «а». Тогда

Ответ: 120 перестановок.

1. В лифт восьмиэтажного дома вошли 5 пассажиров. Сколькими способами могут выйти пассажиры на каждом этаже, начиная со второго?

Варианты ответов

1. 2 520
2. 1 440
3. 16 807

Решение

Задача сводится к распределению 5 пассажиров по 7 этажам (т. е. набор упорядоченный), причем возможны повторения (т. е. несколько пассажиров могут выйти на одном этаже). Таким образом, задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями:

Ответ: 16 807 способами.

1. В базе данных с номерами телефонов содержатся все 7-значные номера (номер не может начинаться на 0). Сколько в книге номеров, у которых 4 последних цифры одинаковые?

Варианты ответов:

1. 151 200
2. 1 000
3. 10 000

Решение

4 последних одинаковых цифры рассматриваем как одну «склеенную» цифру;  
а 7-значный номер – как 4-значный, с последней «склеенной цифрой».  
Количество всех 4-значных номеров равно количеству размещений с повторениями трех последних цифр с учетом того, что первой цифрой не может быть 0:

Ответ: 9 000 номеров.

1. На уроке технологии учитель предложил школьникам выбрать для поделки 10 листов цветной бумаги из предложенных 6 цветов. Сколько вариантов выбора есть у учеников (наборы, отличающиеся лишь расположением листов цветной бумаги на парте считать одинаковыми)?

Варианты ответов

1. 210
2. 3 003
3. 6 006

Решение

Порядок расположения листов цветной бумаги на парте не имеет значения, следовательно, это сочетание. А так как цвета повторяются, то это сочетание с повторением. Итак,

Ответ: выбрать цветную бумагу для поделки можно 3003 способами.

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. 15
2. -4
3. -4; 15

Решение

ОДЗ:

или

С учётом ОДЗ получаем

Ответ:

1. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

**Варианты ответов:**

1. 171
2. 256
3. 4 410

Решение

Вычислим, сколько четверок из семи дисков можно составить у Пети:  
 , число четверок у Вали из девяти дисков   
По правилу умножения находим число обменов **35**·**126=4410.**

**Ответ: 4410 способами.**

1. Для проведения письменного экзамена нужно составить 3 варианта по 5 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 15 задач на 3 варианта?

Варианты ответов

1. 756 756
2. 126 126
3. 240

Решение

Задачи первого варианта можно выбрать   способами. После этого останется 10 задач, следовательно, второй вариант можно составить     способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать  =1 способом. По правилу произведения получаем, что число способов равно . Однако нам всё равно, какой вариант будет первым, какой – вторым, а какой – третьим. Потому найденное число нужно разделить на число перестановок из трёх элементов, то есть на 3! Окончательно получаем, что число способов равно способов.

Ответ: 126126 способов.

Вариант 4

1. Сколько четырехбуквенных слов, которые начинаются буквой «С», можно образовать из букв слова «САПФИР»

Варианты ответов

1. 720
2. 120
3. 60

Решение

На первое место можно поставить букву «С» только одним способом. Остаются пять букв, которые необходимо разместить по трем местам.

Ответ: 60 вариантов

1. Театральная студия заказала костюмы 10 различных животных, причем упаковать их попросили так, чтобы три конкретных костюма лежали рядом. Сколькими способами можно упаковать костюмы для театральной студии?

Варианты ответов

1. 40 320
2. 241 920
3. 720

Решение

Если три костюма должны лежать рядом, то можно их принять за один костюм, тогда количество вариантов упаковки 8 костюмов равно *Р8*=8! =40 320. Так как эти три костюма могут лежать в любом порядке, то количество способов разложить эти три костюма равно *Р3*=3! =6. Значит, общее число способов по правилу перемножения будет равно 40 320·6=241 920.

Ответ: 241 920 способов.

1. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии (8 клеток) шахматной доски?

Варианты ответов

1. 5 040
2. 40 320
3. 1024

Решение

.

Ответ: 5 040 способов.

1. Сколько различных 6-значных чисел, начинающихся с 1 и заканчивающихся 6, можно составить при перестановке цифр 1,2,2,4,4,6?

Варианты ответов

1. 720
2. 6
3. 120

Решение

.

6 чисел.

1. Сколькими способами девочка Яна может разложить 12 кукол по трём ящикам, если каждый ящик может вместить все куклы?

Варианты ответов

1. 256
2. 128 732
3. 531 441

Решение

Задача сводится к распределению 12 кукол по 3 ящикам, причем возможны повторения (т. е. несколько кукол могут попасть в один ящик). Таким образом, задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями:

Ответ: 531 441 способами.

1. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

Варианты ответов

1. 126
2. 252
3. 576

Решение

Так как с помощью цифр 8 и 9 можно записать *2k* *k*-значных числа, то общее количество искомых чисел равно

Ответ: 126 чисел.

1. В студенческой столовой продают сосиски в тесте, ватрушки и пончики. Сколькими способами можно приобрести пять пирожков?

Варианты ответов

1. 48
2. 21
3. 42

Решение

Порядок выбора и размещение пирожков в выборке не имеет значения – просто выбрали 5 штук и всё.

Используем формулу

 количества сочетаний с повторениями:

 способом можно приобрести 5 пирожков.

Ответ: 21 способами.

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. 8
2. -39; 8
3. -39

Решение

ОДЗ:

или

С учётом ОДЗ получили .

Ответ:

1. В футбольном турнире участвуют несколько команд. Оказалось, что все они для трусов и футболок использовали белый, красный, синий, зеленый или желтый цвета, причем были представлены все возможные варианты. У скольких команд футболки и трусы были разного цвета, причем трусы были не красные?

Варианты ответов

1. 32
2. 64
3. 16

Решение

Рассмотрим два взаимоисключающих случая:

Первый: для футболки выбран не красный цвет;

Второй: для футболки выбран красный цвет.

В первом случае есть 4 способа выбрать цвет футболки, а после этого — 3 способа выбрать цвет трусов (кроме красного и цвета футболки), всего 12 способов.

Во втором случае цвет футболки фиксирован (красный), а цвет трусов можно выбрать 4 способами (кроме красного); всего есть 4 способа выбора формы.

По комбинаторному правилу суммы общее число способов выбора формы в этом случае равно 12 + 4 = 16 способов, т. е. у 16 команд футболки и трусы разного цвета, причем трусы — не красные.

Ответ: 16 команд.

1. Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

Варианты ответов

1. 360
2. 720
3. 180

**Решение:**

Комбинации будем считать по разрядам – слева направо:

В разряд сотен можно записать любую из цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9).  Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в разряд десятков можно выбрать любую из 10 цифр:  .

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

**Итого, существует**:   трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

Ответ: 180 чисел.

Вариант 5

1. Сколько трехбуквенных слов, которые заканчиваются буквой «Р», можно образовать из букв слова «КОМАР»

Варианты ответов

1. 60
2. 6
3. 12

Решение

На последнее место можно поставить букву «Р» только одним способом. Остаются четыре буквы, которые необходимо разместить по двум местам.

**Ответ:** 12 вариантов.

1. Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два стоят рядом?

Варианты ответов

1. n!
2. (n-1)!
3. 2· (n-1)!

Решение

Если два элемента обязательно стоят рядом, то фактически имеем *(n-1)* элемент, из которых один представляет собой «склейку» из двух элементов. Число перестановок *Рn-1= (n-1)!*. Но так как в «склейке» элементы тоже могут меняться местами *Р2*=2! =2 способами, то общее число вариантов равно *2*·*(n-1)!*

Ответ: *2*·*(n-1)!* Перестановок.

1. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Варианты ответов

1. 120
2. 10
3. 240

Решение

Решение. Имеем набор {я, я, г, г, г}. Всего перестановок пятиэлементного множества 5!, но мы не должны учитывать перестановки, в которых объекты одного типа меняются местами несколько раз, поэтому нужно поделить на возможное число таких перестановок: 2! *·*3! Получаем в итоге .

Ответ: 10 способами.

1. Сколькими способами можно собрать гирлянду из 5 красных, 4 зеленых, 3 синих и 1 желтого флажка так, чтобы желтый флажок всегда был на первом месте?

Варианты ответов

1. 27 720
2. 1024
3. 10 158

Решение

Из 13 флажков один зафиксирован на первом месте, следовательно, остается 12 флажков, которые нужно распределить по 12 позициям

Ответ: 27 720 способами.

1. Сколькими способами Пончик может рассовать 6 конфет по 9 карманам, если каждый карман может вместить все конфеты?

Варианты ответов

1. 256 121
2. 531 441
3. 120

Решение

.

Ответ: 531 441 способами.

1. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 0, 8 и 9?

Варианты ответов

1. 1 456
2. 720
3. 728

Решение

Учтем, что для первой цифры есть только две возможности выбора. Тогда получим:

Ответ: 728 чисел.

1. В кошельке находится достаточно большое количество рублей, 2-, 5- и 10-рублёвых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

Варианты ответов

1. 720
2. 20
3. 2 048

Решение

используем формулу   сочетаний с повторениями  способами можно выбрать 3 монеты из кошелька.

Ответ: 20.

1. Решить уравнение

Варианты ответов

1. 12
2. -7
3. -7; 12

Решение

ОДЗ:

или

С учётом ОДЗ получаем .

Ответ: .

1. В контрольной работе будет пять задач — по одной из каждой пройденной темы. Задачи будут взяты из общего списка по 10 задач в каждой теме, а всего было пройдено 5 тем. При подготовке к контрольной Вова решил только по 8 задач в каждой теме. Найдите число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все пять задач.

Варианты ответов

1. 5 270
2. 32 768
3. 125

Решение

Так как Вова знает только 8 задач в каждой теме, то число вариантов, в которых Вова умеет решать все пять задач, равно 85 = 32768.

Ответ: 32768 вариантов.

1. Полоска 1*·*10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2, ..., 10. Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 - в один из соседних с уже занятыми и т. д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?

Варианты ответов

1. 256
2. 1024
3. 512

Решение

Пусть 1 стоит в *i-*м слева квадрате полосы. Расстановка остальных чисел однозначно определяется набором чисел, стоящих левее 1. Таких наборов ровно  (так как в каждом наборе фиксирован порядок чисел), а общее количество способов равно

.  
Ответ: 512-ю способами.

**Ключи**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ВАРИАНТ** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **№ВОПРОСА** |
| **1** | **b** | **a** | **b** | **c** | **c** |
| **2** | **a** | **c** | **a** | **b** | **c** |
| **3** | **c** | **b** | **b** | **a** | **b** |
| **4** | **c** | **c** | **c** | **b** | **a** |
| **5** | **a** | **b** | **c** | **c** | **b** |
| **6** | **b** | **a** | **b** | **a** | **c** |
| **7** | **a** | **a** | **b** | **b** | **b** |
| **8** | **b** | **c** | **a** | **a** | **a** |
| **9** | **c** | **a** | **c** | **c** | **b** |
| **10** | **c** | **b** | **b** | **c** | **c** |

Таблица 6

**Тесты третьего уровня**

Вариант 2

1. Каких чисел от 1 до 10 000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

Варианты ответов

1. Поровну
2. Чисел с 1
3. Чисел без 1

Решение

Подсчитаем количество чисел от 1 до 9999 (число 10 000 содержит единицу, его сразу отбросим), в записи которых нет единиц. Каждую цифру можно выбрать 9 способами (любая цифра кроме 1), поэтому все 4 цифры (по правилу произведения) можно выбрать 94 способами (если в числе до значащих цифр стоят нули, мы их просто отбрасываем). При этом один вариант (0000) нужно убрать, так как число 0 не рассматривается. Получаем всего *N* = 94-1=6560 чисел. Так как всего чисел 10 000, то видно, что чисел без единицы среди чисел от 1 до 10 000 больше, чем тех, в записи которых единица есть.

Ответ: чисел без 1 больше, чем чисел с 1.

1. Сколько различных дробей можно составить из чисел 2, 4, 7, 12, 15, 17, 22, 23 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

Варианты ответов

1. 56, 28
2. 112,56
3. 112, 28

Решение

Различных дробей из 8 чисел: 2, 4, 7, 12, 15, 17, 22, 23 можно составить штук (способами выбираем два числа из 8, и двумя способами составляем из них дробь: сначала одно число – числитель, другое знаменатель и наоборот). Из этих 56 дробей ровно 28 будут правильные (т. е., когда числитель меньше знаменателя): способами выбираем два числа из 8, и единственным образом составляем дробь так, чтобы числитель был меньше знаменателя.

Ответ: 56; 28.

1. В бригаде 8 плотников. На каждом из трех этапов конкурса «Золотые руки» должны участвовать 4 мастера, причем состав команды на каждом этапе должен отличаться хотя бы на одного человека. Сколько разных вариантов участия в этапах конкурса можно создать?

Варианты ответов

1. 343000
2. 328440
3. 678000

Решение

При отборе участников первого этапа нам предстоит выбрать четырех мастеров из восьми.

Отбор участников второго этапа аналогичен первому, но из возможных вариантов необходимо исключить тот состав, который был представлен на первом этапе, т. е. . Аналогично для третьего этапа . Общее количество вариантов считаем по правилу произведения: 70⋅69⋅68=328 440 вариантов.

Ответ: 328 440 вариантов.

1. Дано предложение: “Поздним вечером в парке маленькие дети гуляют с родителями”. Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования.

Варианты ответов

1. 23
2. 24
3. 25

Решение

Нужно отметить, что в предложение обязательно входят подлежащее и сказуемое. Каждое из слов “маленькие”, “в парке” и “с родителями” можно как включать, так и не включать в предложение, т. е. имеем 23=8 предложений. Добавив в каждое из них слово “вечером”, получим еще 8 предложений, из которых можно получить еще 8 добавлением слова “поздним”. Так как среди этих 3⋅8 = 24 предложений есть еще и исходное, то всего можно составить 24–1 = 23 предложения.

Ответ: 23 предложения.

1. Сколько чисел меньших миллиона можно записать с помощью цифр 9,8,7?

Варианты ответов

1. 81
2. 1092
3. 2184

Решение

Меньшими миллиона являются однозначные, двузначные, трехзначные, четырехзначные, пятизначные и шестизначные числа. Всего однозначных чисел из цифр 9, 8 и 7 можно составить 3. Чтобы составить двузначные числа, надо из множества {9,8,7}, содержащего 3 элемента, выбрать два, причем они могут быть одинаковые, и упорядочить их. Всего таких чисел будет , трехзначных , четырехзначных , пятизначных , шестизначных , а всего по правил суммы 3+9+27+81+243+729=1092.

Ответ: 1092 числа.

1. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

Варианты ответов

1. 20100
2. 80400
3. 40200

Решение

Сначала посчитаем, сколько способов переставить буквы так, чтобы четыре «е» шли подряд. Всего букв 8. Существует пять способов расположения четырех подряд идущих букв «е». С первой буквы по четвертую, со второй по пятую и т. д. Остальные четыре буквы можно расположить 4! различными способами. Т. е. существует всего 4!⋅5=120 различных способов расположить буквы так, чтобы четыре «е» шли подряд. 8 букв можно расположить 8! =40320 различными способами. Значит, всего существует 40320-120=40200 способов расположить буквы так, чтобы четыре «е» не шли подряд.

Ответ: 40200 способов.

1. На одной из параллельных прямых отмечено 10 точек, а на другой 7 точек. Каждая точка одной прямой соединена с каждой точкой другой прямой. Найдите число точек пересечения полученных отрезков, если никакие три отрезка не имеют общей точки (общие точки на концах отрезка не считаются)

Варианты ответов

1. 945
2. 1026
3. 435

Решение

Любая точка пересечения определяется однозначно, если задать пару точек на одной прямой и пару точек на другой прямой. При этом порядок точек на прямых роли не играет. Поэтому в обоих случаях речь идет о выборе подмножеств. Из 10-множества можно выбрать 2-подмножеств, а из 7-множества - 2-подмножеств. По правилу произведения получаем, что общее число точек пересечения равно

Ответ: 945 точек пересечения

1. Решить систему

Варианты ответов

1. (5,12)
2. (12,12)
3. (12,5)

Решение

Ответ: (12;5)

Вариант 3

1. Из цифр 1,2,3,4,5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

Варианты ответов

1. 120
2. 60
3. 300

Решение

Необходимо посчитать, сколько существует трехзначных, четырехзначных и пятизначных чисел, составленных из этих пяти цифр. Трехзначных чисел , четырехзначных , пятизначных . Используя правило сложения, получим: 60+120+120=300.

Ответ: 300 чисел.

1. Сколько различных дробей можно составить из чисел 2, 5, 7, 13, 16, 18, 24, 27, 30, 33 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

Варианты ответов

1. 90, 45
2. 180, 90
3. 180, 45

Решение

Различных дробей из 8 чисел: 2, 5, 7, 13, 16, 18, 24, 27, 30, 33 можно составить штук (способами выбираем два числа из 10, и двумя способами составляем из них дробь: сначала одно число – числитель, другое знаменатель и наоборот). Из этих 90 дробей ровно 45 будут правильные (т. е., когда числитель меньше знаменателя): способами выбираем два числа из 10, и единственным образом составляем дробь так, чтобы числитель был меньше знаменателя.

Ответ: 90; 45.

1. Сколькими способами можно выбрать только 4 правильных номера в карточках спортлото «6 номеров из 49»?

Варианты ответов

1. 1024
2. 903
3. 516

Решение

Количество способов равно количеству различных выборок 2-х оставшихся неправильных цифр из 49–6 = 43 неправильных цифр

Ответ: 903 способа.

1. Дано предложение: “Холодной зимой на улице маленькие дети надевают варежки”. Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования.

Варианты ответов

1. 26
2. 24
3. 23

Решение

Нужно отметить, что в предложение обязательно входят подлежащее и сказуемое. Каждое из слов “маленькие”, “на улице” и “варежки” можно как включать, так и не включать в предложение, т. е. имеем 23=8 предложений. Добавив в каждое из них слово “зимой”, получим еще 8 предложений, из которых можно получить еще 8 добавлением слова “холодной”. Так как среди этих 3⋅8 = 24 предложений есть еще и исходное, то всего можно составить 24–1 = 23 предложения.

Ответ: 23 предложения.

1. Сколько чисел меньших ста тысяч можно записать с помощью цифр 2,3,5,7?

Варианты ответов

1. 256
2. 1024
3. 1364

Решение

Меньшими миллиона являются однозначные, двузначные, трехзначные, четырехзначные и пятизначные числа. Всего однозначных чисел из цифр 2, 3, 5 и 7 можно составить 4. Чтобы составить двузначные числа, надо из множества {2,3,5,7}, содержащего 4 элемента, выбрать два, причем они могут быть одинаковые, и упорядочить их. Всего таких чисел будет , трехзначных , четырехзначных , пятизначных , а всего по правил суммы 4+16+64+256+1024=1364.

Ответ: 1364 числа.

1. Петя составляет шестибуквенные слова перестановкой букв слова **КАБАЛА**. При этом он избегает слов с двумя подряд одинаковыми буквами. Сколько всего различных слов может составить Петя?

Варианты ответов

1. 48
2. 24
3. 126

Решение

Посчитаем количество слов без двух подряд одинаковых букв. Будем считать относительно буквы А, которых три в заданном слове КАБАЛА. Это четыре возможных места расположения букв А. Буквы не могут повторяться, поэтому их количество в каждом варианте будет уменьшаться:

А\*А\*А\* = (3\*2\*1) = 6 слов

А\*А\*\*А = 6 слов

\*А\*А\*А = 6 слов

А\*\*А\*А = 6 слов

Получили 4 варианта, и в каждом из них можно составить по 6 слов.

Таким образом, получим общее количество слов:

4 ⋅ 6 = 24

Ответ: 24

1. Найти число точек пересечения диагоналей, лежащих внутри выпуклого n-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.

Варианты ответов:

Решение

Если взять любые четыре вершины *n*-угольника, то они дадут только одну точку пересечения диагоналей (точку пересечения диагоналей получившегося четырехугольника) (рис.1). Так как через эту точку не проходит больше никакая другая диагональ, то любая внутренняя точка пересечения диагоналей однозначно определяется выбором четверки вершин, причем порядок вершин роли не играет. Итак, число таких четверок, и тем самым, внутренних точек пересечения диагоналей, равно

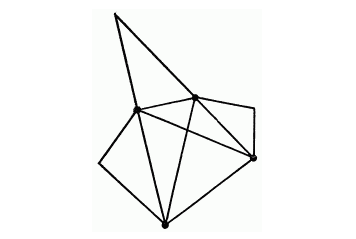


Рис.1

Ответ: .

1. Решить систему:

Варианты ответов

1. (15,6)
2. (6,15)
3. (6,6)

Решение

Решаем методом сложения:

Ответ: (15; 6).

**Ключи**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **ВАРИАНТ** | **1** | **2** | **3** |
| **№ВОПРОСА** |
| **1** | **b** | **c** | **c** |
| **2** | **c** | **a** | **a** |
| **3** | **a** | **b** | **b** |
| **4** | **b** | **a** | **c** |
| **5** | **b** | **b** | **c** |
| **6** | **a** | **c** | **b** |
| **7** | **c** | **a** | **b** |
| **8** | **b** | **c** | **a** |

Таблица 7