

Метод рационализации при решении неравенств

Содержание

1. Введение	3
2. Метод рационализации при решении неравенств, содержащих логарифмические функции.	4
3. Метод рационализации при решении неравенств, содержащих иррациональные выражения.	18
4. Метод рационализации при решении неравенств, содержащих модули.	22
5. Метод рационализации при решении неравенств, содержащих показательные функции.	28
6. Заключение.	34
7.Список литературы.	35

Введение.

Самым легким способом решения неравенств является способ решения рациональных неравенств методом интервалов, но не все неравенства имеют структуру, которая позволяет решать их этим методом. Поэтому цель работы – предложить метод решения сложных неравенств (неравенства, содержащие логарифмические, показательные, иррациональные выражения и выражения с модулями) путем замены множителей. Идея этого метода заключается в том, что неравенства повышенной сложности сводятся к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает. Решение неравенства – это объединение конечного числа непересекающихся промежутков. Их легко задать одним рациональным неравенством, что во многих ситуациях позволяет быстрее двигаться к ответу, а иногда получать более эффективные схемы решения типовых неравенств.

Метод рационализации при решении неравенств, содержащих логарифмические функции.

Разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с произведением разности чисел этих логарифмов на отклонение от единицы. Другими словами выражение вида $(\log_a f - \log_a g)$ имеет тот же знак (в области существования логарифмов) что и выражение $(f-g)(a-1)$

Выделим некоторые выражения и соответствующие рационализирующие выражения, позволяющие исключительно эффективно решать многие логарифмические неравенства, которые можно отнести к разряду повышенной сложности.

$$\begin{aligned} 1) \log_a f > \log_a g &\Leftrightarrow \begin{cases} f - g > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \\ 2) \log_a f < \log_a g &\Leftrightarrow \begin{cases} f - g < 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases} \\ 3) \log_a f > \log_a g &\Leftrightarrow \begin{cases} f - g > 0 \\ a < 0, a \neq 1 \end{cases} \\ 4) \log_a f < \log_a g &\Leftrightarrow \begin{cases} f - g < 0 \\ a < 0, a \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$5) \frac{\log_a f_1 - \log_a g_1}{\log_a f_2 - \log_a g_2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 - g_1 > 0, \\ f_2 - g_2 > 0, \\ f_i, g_i > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases}$$

Таблица для рационализации в логарифмических неравенствах

$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
$\log_h f + \log_h g \vee 0$	$(h-1)(fg-1) \vee 0$
$\log_h f \vee \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$\log_h f \vee 1$	$(h-1)(f-h) \vee 0$
$\log_h f \vee 0$	$(h-1)(f-1) \vee 0$

Примеры решения логарифмических неравенств методом рационализации.

Пример. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(x^2 - 1) > \log_{x-2}(2x^2 + x - 3).$$

Решение. Воспользуемся теоремой 1. получим следующую систему неравенств:



Решая первые четыре неравенства, практически находим ОДЗ исходного неравенства:



Откуда: $x \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Решим теперь пятое неравенство системы. После элементарных преобразований получим неравенство

$$(x - 3)(-x^2 - x + 2) > 0.$$

Умножим второй сомножитель на -1 и поменяем знак неравенства:

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) < 0.$$

Нетрудно заметить, что корнями второго множителя в этом неравенстве являются числа 1 и -2. Поэтому, раскладывая второй множитель на одночлены первого порядка, получаем:

$$(x - 3)(x - 1)(x + 2) < 0.$$

Это неравенство легко решить методом интервалов:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, 3).$$

С учетом найденного ранее ОДЗ, получаем окончательный ответ.

Ответ: $x \in (2, 3)$.

Приведем сравнение решения неравенства традиционным методом и методом рационализации:

№1. Решить неравенство:

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq 0$$

(метод рационализации)

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq 0$$

Решение:

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq 0,$$

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq \log_{\log_x 2x} 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\log_x 2x - 1)(5x - 2 - 1) \geq 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \\ 5x - 2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\log_x 2x - \log_x x)(5x - 3) \geq 0, \\ x > 0,4, \\ (x - 1)(2x - 1) > 0, \\ x \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x - 1)(2x - x)(5x - 3) \geq 0, \\ x > 0,4, \\ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x < 0,5 \\ x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(традиционный метод)

$$\log_{\log_x 2x}(5x - 2) \geq 0$$

Решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2 > 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x 2x \neq 1 \end{array} \right.$$

1) ОДЗ:

$$\left\{ \begin{array}{l} x > \frac{2}{5}, \\ \log_x 2x > \log_x 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2x, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > \frac{2}{5}, \\ x \neq 1, \\ 2x < 1, \\ 0 < x < 1, \end{array} \right. \text{или} \left\{ \begin{array}{l} x > \frac{2}{5}, \\ x \neq 1, \\ 2x > 1, \\ x > 1, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 0,6 \\ x \geq 1 \\ x > 0,4, \\ x \neq 1 \\ \begin{cases} x < 0,5 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$0,4 < x < 0,5; \quad x > 1$$

Ответ:

$$0,4 < x < 0,5; \quad x > 1$$

$$\frac{2}{5} < x < 0,5; \quad x > 1$$

$$2) \log_{\log_x 2x} (5x - 2) \geq \log_{\log_x 2x} 1$$

$$\begin{cases} 0 < \log_x 2x < 1 \\ 5x - 2 \leq 1 \\ \begin{cases} \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

a)

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ x < 2x < 1 \\ x \leq 0,6 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ 1 < 2x < x \\ x \geq 0,6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5} < x < 0,5 \\ 0 < x < 0,5 \\ x \leq 0,6 \end{cases}$$

$$\frac{2}{5} < x < 0,5$$

$$6) \begin{cases} \log_x 2x > 1 \\ 5x - 2 \geq 1 \\ \left[\frac{2}{5} < x < 0,5 \right. \\ \quad \left. x > 1 \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{2}{5} < x < 0,5 \right. \\ \quad \left. \begin{cases} 2x < x \\ x \leq 0,6 \end{cases} \right. \\ \quad \left. \begin{cases} x > 1 \\ 2x > x \\ x \geq 0,6 \end{cases} \right\} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ x \geq 0,6 \end{cases}$$

$$x > 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{5} < x < 0,5; x > 1$$

№2. Решить неравенство: $\log_x(x-2)\log_x(x+2) \leq 0$

Решение: $\log_x(x-2)\log_x(x+2) \leq 0$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x \neq 1, \\ (x-1)(x-2-1)(x+2-1)(x-1) \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ (x-1)^2(x-3)(x+1) \leq 0, \end{cases}$$

$$2 < x \leq 3$$

Ответ: $2 < x \leq 3$

№3. Решить неравенство: $\log_x(x^2 - 3) < 0$

Решение: $\log_x(x^2 - 3) < 0$, $\log_x(x^2 - 3) < \log_x 1$,

$$\begin{cases} (x^2 - 3 - 1)(x - 1) < 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 - 4)(x - 1) < 0 \\ x > \sqrt{3} \end{cases},$$

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 2)(x - 1) < 0, \\ x > \sqrt{3} \end{cases} \quad \sqrt{3} < x < 2$$

Ответ: $(\sqrt{3}; 2)$

№4. Решить неравенство $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$

Решение:

$$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0, \quad \log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3} (2x + 3) < 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x+3-1)(x^2-2x-3) < 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ x \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(x+1)(x+1)(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} -1,5 < x < -1 \\ -1 < x < 0 \\ 0 < x < 3 \end{array} \right.$$

Ответ: $(-1,5;-1) \cup (-1;0) \cup (0;3)$

№5. Решить неравенство $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leq 2$

Решение: $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leq 2,$

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leq \log_{|x+2|}(x+2)^2,$$

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \leq 0,$$

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4) \leq 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0, \\ |x+2| \neq 1, \\ |x+2| > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x+2)^2-1)(-3x^2+3x) \leq 0, \\ -0,5 < x < 4, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geq 0, \\ -0,5 < x < 4, \\ x \neq -1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Ответ: $(-0,5; 0]; [1; 4)$

№6. Решить неравенство

$$\log_{x+3} \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0$$

Решение:

$$\log_{x+3} \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - 1\right)(x+3-1) > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2, \\ -1 < x < 1, \\ \frac{2x^2}{1-x^2}(x+2) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ \frac{2x^2}{1-x^2} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1;0); (0;1)$

№7. Решить неравенство : $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$.

Решение: $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$, $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq \log_{\frac{x}{3}} 1$,

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 1\right)(\log_x \sqrt{3-x} - 1) \geq 0, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ \frac{x}{3} > 0, \\ \frac{x}{3} \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 1\right)(\log_x \sqrt{3-x} - \log_x x) \geq 0, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ \frac{x}{3} > 0, \\ \frac{x}{3} \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{3} - 1\right)(\sqrt{3-x} - x)(x - 1) \geq 0, \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1, \\ x < 3, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x}{3}-1\right)(3-x-x^2)(x-1) \geq 0, \\ (x-1)(3-x-1) > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x < 3, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x-1)(x^2+x-3) \leq 0, \\ (x-1)(2-x) > 0, \\ 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0 \\ (x-1)(2-x) > 0, \\ 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0, \\ 1 < x < 2, \\ 0 < x < 3, \\ x \neq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x-1)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0, \\ 1 < x < 2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \\ x \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \\ 1 < x < 2, \end{array} \right.$$

$$\frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \leq x < 2$$

Ответ: $\left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; 2\right)$

№8. Решить неравенство $\log_{x-2}(x^2 - 1) > \log_{x-2}(2x^2 + x - 3)$

Решение:

$$\log_{x-2}(x^2 - 1) > \log_{x-2}(2x^2 + x - 3),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 + x - 3 > 0, \\ (x^2 - 1 - 2x^2 - x + 3)(x - 2 - 1) > 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 2x^2 + x - 3 > 0, \\ (-x^2 - x + 2)(x - 3) > 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 2, \\ x \neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 1 \end{array} \right. \\ 2(x - 1)(x + 1,5) > 0, \\ (x - 3)(x - 1)(x + 2) < 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 2, \\ x \neq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1,5 \\ x > 1, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 2, \\ 1 < x < 3, \end{array} \right. \quad 2 < x < 3$$

Ответ: $2 < x < 3$

№9. Решить неравенство $\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$

Решение:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x),$$

а)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\log_{3-x}(12x^2-41x+35)} \geq \frac{1}{\log_{3-x}(2x^2-5x+3)} \\ 3-x > 0 \\ 12x^2-41x+35 > 0, \\ 12x^2-41x+35 \neq 1, \\ (2x^2-5x+3) > 0, \\ (2x^2-5x+3) \neq 1, \\ 3-x \neq 1, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\log_{3-x}(2x^2-5x+3) - \log_{3-x}(12x^2-41x+35)}{\log_{3-x}(2x^2-5x+3)\log_{3-x}(12x^2-41x+35)} \geq 0 \\ 12\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x - \frac{7}{4}\right) > 0 \\ 2(x-1)(x-1,5) > 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 0,5 \end{array} \right.$$

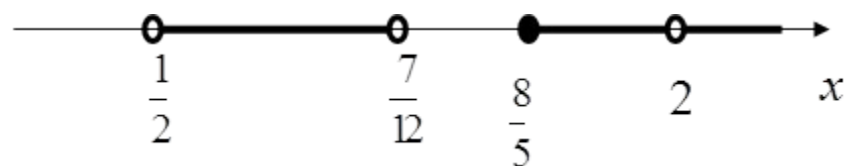
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(3-x-1)(2x^2-5x+3-12x^2+41x-35)}{(3-x-1)(12x^2-41x+35-1)(3-x-1)(2x^2-5x+3-1)} \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 1,5 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x < \frac{5}{3} \\ x > \frac{7}{4} \end{array} \right. \\ x \neq 2 \\ x \neq 0,5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-10x^2+35x-32}{(2-x)(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)} \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x > \frac{7}{4} \\ 1,5 < x < \frac{5}{3} \\ x < 1 \end{array} \right. \\ x \neq 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{-10x^2+35x-32}{(2-x)(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-10(x-2)(x-1,6)}{(2-x)12(x-\frac{17}{12})(x-2)2(x-2)(x-0,5)} \geq 0$$

$$\frac{(x-1,6)}{(x-\frac{17}{12})(x-2)^2(x-0,5)} \geq 0$$



$$0,5 < x < \frac{7}{12}, 1,6 \leq x < 2, x > 2$$

$$\text{Имеем } \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > \frac{7}{4} \\ 1,5 < x < \frac{5}{3} \\ x < 1 \\ x \neq 2 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} 0,5 < x < \frac{7}{12} \\ 1,6 \leq x < 2 \\ x > 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

следовательно $0,5 < x < 1; 1,6 < x < \frac{5}{3}; \frac{7}{4} < x < 2; x > 2$

б) если $x-3=1$, $x=2$ - не является решением (при $x=2$ $12x^2 - 41x + 35 = 1$).

Ответ: $0,5 < x < 1; 1,6 < x < \frac{5}{3}; \frac{7}{4} < x < 2; x > 2$

№10. Решить неравенство $\log_{x+2}(36 + 16x - x^2) - \frac{1}{16} \log^2_{x+2}(x - 18)^2 \geq 2$

Решение:

$$\log_{x+2}(36 + 16x - x^2) - \frac{1}{16} \log^2_{x+2}(x - 18)^2 \geq 2,$$

$$\log_{x+2}((x+2)(18-x)) - \frac{1}{4} \log^2_{x+2}|x-18| \geq 2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \\ \log_{x+2}((x+2)(18-x)) - \frac{1}{4} \log^2_{x+2}(18-x) \geq 2, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \\ 1 + \log_{x+2}(18-x) - \frac{1}{4}\log^2_{x+2}(18-x) \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \\ \log_{x+2}(18-x) - \frac{1}{4}\log^2_{x+2}(18-x) \geq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \\ \log^2_{x+2}(18-x) - 4\log_{x+2}(18-x) + 4 \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (\log_{x+2}(18-x) - 2)^2 \leq 0, \\ -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{x+2}(18-x) = 2, \\ -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} 18-x = (x+2)^2, \\ -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 5x - 14 = 0, \\ -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = -7 \end{cases} \\ -2 < x < 18, \\ x \neq -1, \end{cases} \quad x = 2$$

Ответ: $x = 2$

№11. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{49}}(26-x)\log_{6-x}\frac{1}{7} \geq 1$

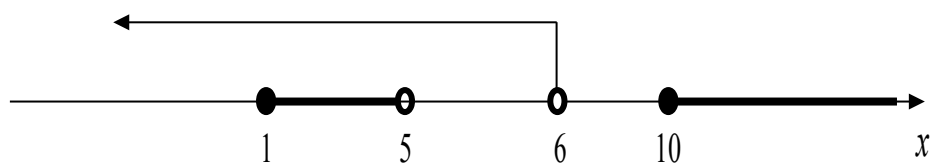
Решение:

$$\log_{\frac{1}{49}}(26-x) \log_{6-x} \frac{1}{7} \geq 1,$$

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-x) \log_{6-x} \frac{1}{7} \geq 2, \quad \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} \geq 2, \quad \log_{6-x}(26-x) \geq 2,$$

$$\begin{cases} (6-x-1)(26-x-(6-x))^2 \geq 0, \\ 26-x > 0, \\ 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} (5-x)(x^2-11x+10) \leq 0 \\ x < 26 \\ x < 6 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-x)(x-1)(x-10) \leq 0 \\ x < 6 \\ x \neq 5 \end{cases} \quad 1 \leq x < 5$$



Ответ: $1 \leq x < 5$

№12. Решить неравенство $\frac{1}{x} \log_{0,4} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} \leq \log_{2,5} \frac{1}{5}$

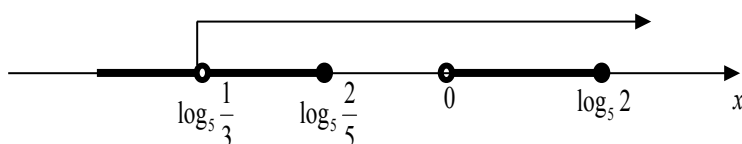
Решение:

$$\frac{1}{x} \log_{0,4} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} \leq \log_{2,5} \frac{1}{5} \quad \frac{1}{x} \log_{\frac{2}{5}} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} \leq \log_{\frac{2}{5}} 5$$

$$\frac{1}{x} (\log_{\frac{2}{5}} \frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} - \log_{\frac{2}{5}} 5^x) \leq 0 \quad \begin{cases} 12-4 \cdot 5^{-x} > 0 \\ \frac{1}{x} (\frac{2}{5} - 1) (\frac{12-4 \cdot 5^{-x}}{5} - 5^x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 12 \cdot 5^x - 4 > 0 \\ \frac{1}{x} \left(\frac{2}{5} - 1 \right) \left(\frac{12 - 4 \cdot 5^{-x}}{5} - 5^x \right) \leq 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5^x > \frac{1}{3} \\ \frac{5 \cdot 5^{2x} - 12 \cdot 5^x + 4}{x} \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5^x > \frac{1}{3} \\ \frac{(5^x - 2)(5^x - 0.4)}{x} \leq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > \log_5 \frac{1}{3} \\ \frac{(x - \log_5 2)(x - \log_5 \frac{2}{5})}{x} \leq 0 \end{array} \right.$$



$$\log_5 \frac{1}{3} < x \leq \log_5 \frac{2}{5}; \quad 0 < x < \log_5 2$$

Ответ: $\log_5 \frac{1}{3} < x \leq \log_5 \frac{2}{5}; \quad 0 < x < \log_5 2$

№13. (Применение метода рационализации при решении неравенств с параметрами)

Решить неравенство.

$$\log_{\frac{a+1}{a+2}}(x^2 + 3) > 1$$

$$\log_{\frac{a+1}{a+2}}(x^2 + 3) > 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a+1}{a+2} > 0 \\ \frac{a+1}{a+2} \neq 1 \\ \left(\frac{a+1}{a+2} - 1 \right) \left(x^2 + 3 - \frac{a+1}{a+2} \right) > 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a < -2 \\ a > -1 \end{cases} \\ \frac{1}{a+2} \left(x^2 + \frac{2a+5}{a+2} \right) < 0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a > -1$. Тогда получим, что $\frac{1}{a+2} > 0$ и $\frac{2a+5}{a+2} > 0$,

следовательно,

$$\frac{1}{a+2} \left(x^2 + \frac{2a+5}{a+2} \right) < 0$$

для любых x , что не удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть теперь $a < -2$. В этом случае $\frac{1}{a+2} < 0$ и, для того чтобы

неравенство $\frac{1}{a+2} \left(x^2 + \frac{2a+5}{a+2} \right) < 0$ было верно для любых x , необходимо и

достаточно, чтобы выполнялось условие $\frac{2a+5}{a+2} > 0$.

Получим систему:

$$\begin{cases} a+2 < 0, \\ \frac{2a+5}{a+2} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+2 < 0, \\ 2a+5 < 0 \end{cases} \quad a < -\frac{5}{2}$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{5}{2})$

Метод рационализации при решении неравенств, содержащих иррациональные выражения.

При решении неравенств, содержащих иррациональные выражения, используем следующее правило $\sqrt{f} \cdot \sqrt{g} \geq 0 \Leftrightarrow f - g \geq 0$ (на области определения)

№1. Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x + 7} - 1} \leq 0$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} - 2\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x + 7} - 1} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4(1 - x)}}{\sqrt{x + 7} - 1} \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 1) - 4(1 - x)}{(x + 7) - 1} \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 6} \leq 0 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x \leq 1 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} \frac{(x + 5)(x - 1)}{x + 6} \leq 0 \\ \begin{cases} -7 \leq x \leq -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$-7 \leq x < -6; -5 \leq x \leq -1; x = 1$$

Ответ: $-7 \leq x < -6; -5 \leq x \leq -1; x = 1$

№2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^4 - 2} - 1}{x + 1} \leq x - 1$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x^4 - 2} - 1}{x + 1} \leq x - 1$$

$$\frac{\sqrt{x^4 - 2} - x^2}{x + 1} \leq 0$$

$$\begin{cases} \frac{x^4 - 2 - x^4}{x + 1} \leq 0 \\ x \neq -1 \\ \begin{cases} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{x + 1} \geq 0 \\ \begin{cases} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x < -\sqrt[4]{2} \\ x > \sqrt[4]{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$x \geq \sqrt[4]{2}$$

Ответ:

$$x \geq \sqrt[4]{2}$$

№3 Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}}{3x^2 + 5x - 2} < 0$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}}{3x^2 + 5x - 2} < 0, \quad \begin{cases} \frac{(x + 1) - (1 - x)}{(x + 2)(3x - 1)} < 0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{2x}{(x + 2)(3x - 1)} < 0 \\ x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$0 < x < \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } 0 < x < \frac{1}{3}$$

№4 Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{\sqrt[3]{3x^2 + 10x + 5} + \sqrt[3]{3x^2 + 7x}} \geq 0$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{\sqrt[3]{3x^2 + 10x + 5} + \sqrt[3]{3x^2 + 7x}} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 + 3x + 3}}{\sqrt[3]{3x^2 + 10x + 5} - \sqrt[3]{-3x^2 - 7x}} \geq 0,$$

$$\frac{2x^2 + 5x + 4 - x^2 - 3x - 3}{3x^2 + 10x + 5 + 3x^2 + 7x} \geq 0$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{6x^2 + 17x + 5} \geq 0, \quad \frac{(x + 1)^2}{(2x + 5)(3x + 1)} \geq 0$$

$$x < -2,5; \quad x > -\frac{1}{3}; \quad x = -1$$

Ответ:

$$x < -2,5; \quad x > -\frac{1}{3}; \quad x = -1$$

№5 Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{x + 2} - |x - 2|}{\sqrt{8 - x} - |x - 2|} \geq 1$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{x + 2} - |x - 2|}{\sqrt{8 - x} - |x - 2|} \geq 1, \quad \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{8 - x}}{\sqrt{8 - x} - \sqrt{(x - 2)^2}} \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x + 2 - 8 + x}{8 - x - (x - 2)^2} \geq 0, \\ x + 2 > 0, \\ 8 - x > 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x - 6}{-x^2 + 3x + 4} \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x - 6}{x^2 - 3x - 4} \leq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x - 6}{(x - 4)(x + 1)} \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 8, \end{array} \right.$$

$$-2 \leq x \leq -1; \quad 3 \leq x < 4$$

Ответ:

$$-2 \leq x \leq -1; \quad 3 \leq x < 4$$

№6. Решить неравенство:

$$\frac{\sqrt{35+2x-x^2}-x-5}{|3x^2+4x-9|-|x^2+6x+3|} \leq 0$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{35+2x-x^2}-x-5}{|3x^2+4x-9|-|x^2+6x+3|} \leq 0$$

$35+2x-x^2 \geq 0$ при $-5 \leq x \leq 7$ тогда $x+5 \geq 0$, следовательно

$$\frac{\sqrt{35+2x-x^2}-\sqrt{(x+5)^2}}{|3x^2+4x-9|-|x^2+6x+3|} \leq 0$$

$$\frac{35+2x-x^2-x^2-10x-25}{(3x^2+4x-9-x^2-6x-3)(3x^2+4x-9+x^2+6x+3)} \leq 0$$

$$\frac{-2x^2-8x+10}{(2x^2-2x-12)(2x^2+5x-3)} \leq 0 \quad \frac{x^2+4x-5}{(x^2-x-6)(2x^2+5x-3)} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+5)}{(x-3)(x+2)(x+3)(x-0,5)} \geq 0$$

$$x = -5; -3 < x < -2; 0,5 < x \leq 1; 3 < x \leq 7$$

Ответ:

$$x = -5; \quad -3 < x < -2; \quad 0,5 < x \leq 1; \quad 3 < x \leq 7$$

Метод рационализации при решении неравенств, содержащих модули.

Опорная информация, позволяющая указать удобные замены, заключается в двух основных свойствах модуля:

$$|m|^2 = m^2 \text{ и } |m| \geq 0 \text{ для всех } m,$$

а также в монотонном возрастании на множестве неотрицательных чисел функции $y=t^2$.

Приведем типы замен:

$$(|f| + |g|) \leftrightarrow (f - g)(f + g),$$

$$(|f| + |g|) \xrightarrow{g=0} (f - g)(f + g),$$

$$(|f| - \sqrt{|g|}) \xrightarrow{g=0} (f^2 - g),$$

$$(|f| - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f^2 - g)(f^2 + g)$$

$$(\sqrt{|f|} - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f - g)(f + g)$$

$$|f| - (ax^2 + bx + c) \leftrightarrow (f - ax^2 - bx - c)(f + ax^2 + bx + c)$$

$$a > 0, D \leq 0$$

№1. Решить неравенство: $|x^2 + 10x + 16| - |x^2 - 16| \geq 0$.

Решение. $|x^2 + 10x + 16| - |x^2 - 16| \geq 0$,

$$(x^2 + 10x + 16)^2 - (x^2 - 16)^2 \geq 0,$$

$$(x^2 + 10x + 16 - x^2 + 16)(x^2 + 10x + 16 + x^2 - 16) \geq 0,$$

$$(10x+32)(2x^2 + 10x) \geq 0, \quad (10x+32)2x(x+5) \geq 0,$$

$$-5 \leq x \leq -3,2; \quad x \geq 0.$$

Ответ: $-5 \leq x \leq -3,2; \quad x \geq 0.$

Для решения дробных неравенств, содержащих модули удобно использовать следующее правило:

$$\frac{|u_1(x)| - |v_1(x)|}{|u(x)| - |v(x)|} \geq 0$$

$$\frac{u(x)_1^2 - v(x)_1^2}{u(x)^2 - v(x)^2} \geq 0$$

№2. Решить неравенство: $\frac{|2x - 1| - |x + 1|}{|2x + 3| - |x - 3|} \leq 0$

Решение:

$$\frac{|2x - 1| - |x + 1|}{|2x + 3| - |x - 3|} \leq 0$$

$$\frac{(2x - 1 - x - 1)(2x - 1 + x + 1)}{(2x + 3 - x + 3)(2x + 3 + x - 3)} \leq 0, \quad \frac{(2x - 2)3x}{(x + 6)3x} \leq 0,$$

$$-6 < x < 0; \quad 0 < x \leq 2$$

Ответ: $-6 < x < 0; \quad 0 < x \leq 2$

№3. Решить неравенство:

$$\frac{|4x - 3| - |3x - 4|}{|x^2 - x - 18| - |x^2 + x|} \leq 0$$

Решение:

$$\frac{|4x - 3| - |3x - 4|}{|x^2 - x - 18| - |x^2 + x|} \leq 0$$

$$\frac{(4x - 3 - 3x + 4)(4x - 3 + 3x - 4)}{(x^2 - x - 18 - x^2 - x)(x^2 - x - 18 + x^2 + x)} \leq 0,$$

$$\frac{(x + 1)(7x - 7)}{(x + 9)(2x^2 - 18)} \leq 0$$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 9)(x - 3)(x + 3)} \leq 0$$

$$-9 < x < -3; \quad -1 \leq x \leq 1; \quad x > 3.$$

Ответ: $-9 < x < -3; \quad -1 \leq x \leq 1; \quad x > 3.$

№4. Решить неравенство:

$$\frac{|2x^2 - 13x + 12| - x^2}{|x^2 - 6x + 4| - 4} \geq 0$$

Решение:

$$\frac{|2x^2 - 13x + 12| - x^2}{|x^2 - 6x + 4| - 4} \geq 0$$

$$\frac{(2x^2 - 13x + 12 - x^2)(2x^2 - 13x + 12 + x^2)}{(x^2 - 6x + 4 - 4)(x^2 - 6x + 4 + 4)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2 - 13x + 12)(3x^2 - 13x + 12)}{(x^2 - 6x)(x^2 - 6x + 8)} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)(x-12)(3x-4)(x-3)}{x(x-6)(x-2)(x-4)} \geq 0,$$

$$x < 0, \quad 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \quad 2 < x \leq 3, \quad 4 < x < 6, \quad x \geq 12.$$

$$\text{Ответ: } x < 0, \quad 1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \quad 2 < x \leq 3, \quad 4 < x < 6, \quad x \geq 12.$$

№5. Решить неравенство:

$$\frac{||x^2 + x| - 3| - 3}{||3x + 4| - 2| - 1} \geq 0$$

Решение:

$$\frac{||x^2 + x| - 3| - 3}{||3x + 4| - 2| - 1} \geq 0 \quad \frac{||x^2 + x| - 3| - |3|}{||3x + 4| - 2| - |1|} \geq 0$$

$$\frac{(|x^2 + x| - 3 - 3)(|x^2 + x| - 3 + 3)}{(|3x + 4| - 2 - 1)(|3x + 4| - 2 + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(|x^2 + x| - 6)|x^2 + x|}{(|3x + 4| - 3)(|3x + 4| - 1)} \geq 0$$

$$\frac{(x^2 + x - 6)(x^2 + x + 6)|x^2 + x|}{(3x + 4 - 3)(3x + 4 + 3)(3x + 4 - 1)(3x + 4 + 1)} \geq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+3)x^2 + x + 6)|x^2 + x|}{(3x+1)(3x-7)(3x+5)(3x+3)} \geq 0,$$

$$x \leq -3, \quad -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}, \quad -1 < x < -\frac{1}{3}, \quad x = 0, \quad x \geq 2.$$

$$\text{Ответ: } x \leq -3, \quad -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}, \quad -1 < x < -\frac{1}{3}, \quad x = 0, \quad x \geq 2.$$

№6. Решить неравенство:

Решение:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - 4x - 12| - |3x^2 - 18x + 24|} \geq 0$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x^2 - 4x - 12 - 3x^2 + 18x - 24)(x^2 - 4x - 12 + 3x^2 - 18x + 24)} \geq 0,$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(-2x^2 - 14x - 36)(4x^2 - 22x - 12)} \geq 0$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x^2 + 7x + 18)(2x^2 - 11x - 6)} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-6)(2x+1)} \leq 0$$

$$x < -\frac{1}{2}, 3 \leq x < 6.$$

$$\text{Ответ: } x < -\frac{1}{2}, 3 \leq x < 6.$$

№7. Решить неравенство:

$$\frac{|x-5| - |x+4|}{|x-2| - |x+1|} < \frac{|x-2| + |x+1|}{|x+4|} \cdot \frac{|x-5| + |x+4|}{|x-2| + |x+1|}$$

$$\frac{(x-5-x-4)(x-5+x+4)}{(x-2-x-1)(x-2+x+1)} < \frac{|x-5| + |x+4|}{|x+4|}$$

$$\frac{-9(2x-1)}{-3(2x-1)} < \frac{|x-5| + |x+4|}{|x+4|}$$

$$\begin{cases} 3|x+4| < |x-5| + |x+4|, \\ 2x-1 \neq 0, \\ x+4 \neq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2|x+4| < |x-5|, \\ x \neq 0,5 \\ x \neq -4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+8-x+5)(2x+8+x-5) < 0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-13)(3x+3) < 0 \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

$$-13 < x < -4, -4 < x < -1.$$

$$\text{Ответ: } -13 < x < -4, -4 < x < -1.$$

№8. Решить неравенство:

$$\frac{|2x^2 - x - 3| - x^2 - 2x - 1}{|3x^2 + x - 2| - x^2 - 2x - 1} \leq 0$$

$$\frac{|2x^2 - x - 3| - (x^2 + 2x + 1)}{|3x^2 + x - 2| - (x^2 + 2x + 1)} \leq 0,$$

$$\frac{(2x^2 - x - 3 - x^2 - 2x - 1)(2x^2 - x - 3 + x^2 + 2x + 1)}{(3x^2 + x - 2 - x^2 - 2x - 1)(3x^2 + x - 2 + x^2 + 2x + 1)} \leq 0,$$

$$\frac{(x^2 - 3x - 4)(3x^2 + x - 2)}{(2x^2 - x - 3)(4x^2 + 3x - 1)} \leq 0, \quad \frac{(x+1)(3x-2)(x+1)(x-4)}{(x+1)(4x-1)(x+1)2x-3)} \leq 0,$$

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2} < x \leq 4$$

Ответ:

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2} < x \leq 4$$

Метод рационализации при решении неравенств,
содержащих показательные функции

Можно установить, что разность степеней по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с произведением разности показателей

этих степеней на отклонение основания степени от единицы. Другими словами, выражение вида $(a^f - a^g)$ имеет тот же знак, что и выражение

$(f - g)(a - 1)$ при $a > 0$ (если $a=1$, то выражения равны нулю)

$$1) a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a^f > b^g, \\ b > 0, \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a - 1) > 0;$$

$$3) \frac{a^{f_1} - a^{g_1}}{a^{f_2} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ a > 0, a \neq 1; \end{cases}$$

Метод рационализации в показательных неравенствах

$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \vee 1$	$(h-1) \cdot f \vee 0$
$f^h \vee g^h$	$(f-g) \cdot h \vee 0$

№1. Решить неравенство:

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1$$

Решение:

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1 ; (x^2 - x)((4x^2 + 2x + 1) - 1) > 0,$$

$$x^2(x - 1)(2x + 1) > 0; \quad x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$

№2. Решить неравенство:

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$$

Решение:

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3; \left(\frac{x+5}{x+2} - 3\right)((x^2 + x + 1) - 1) \geq 0;$$

$$\frac{(-2x-1)x(x+1)(x^2+x+2)}{x+2} \geq 0; x \in (-2; -1] \cup [-0,5; 0]$$

Ответ: $(-2; -1] \cup [-0,5; 0]$

Пример. Решить неравенство

$$(x^2 - x - 2)^{(2x^2 - x - 1)} (x^2 - x - 2)^{(9 - x^2)} \geq 0.$$

Решение. Составим систему неравенств, аналогичную системе (4) из теоремы 2:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 1, \\ ((x^2 - x - 2) - 1)((2x^2 - x - 1) - (9 - x^2)) \geq 0. \end{cases}$$

Решив два первых неравенства, найдем ОДЗ исходного показательного неравенства:

$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ или } x \geq 2, \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Откуда ОДЗ: $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1) \cup (2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$.

Далее рассмотрим основное неравенство $((x^2 - x - 2) - 1)((2x^2 - x - 1) - (9 - x^2)) \geq 0$, которое упрощается к виду: $(x^2 - x - 3)(3x^2 - x - 10) \geq 0$.

Корни первого множителя этого неравенства мы нашли ранее: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Корни второго множителя равны: $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{6}$, $x_3 = -\frac{5}{3}$, $x_4 = 2$.

Теперь перед нами встала нетривиальная задача упорядочения корней. Так как $3 < \sqrt{13} < 4$, то $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$. Применив метод интервалов, получим следующее решение основного неравенства:

$$x \in (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 2) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty).$$

Учитывая найденную ранее ОДЗ, получаем окончательный ответ:

$$x \in (-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty).$$

№3. Решить неравенство:

$$1 < 3^{|x^2-x|} < 9$$

Решение:

$$1 < 3^{|x^2-x|} < 9; 0 < |x^2 - x| < 2; |x^2 - x|(|x^2 - x| - 2) < 0$$

$$(x^2 - x)^2((x^2 - x) - 2)(x^2 - x + 2) < 0; x^2(x - 1)^2(x + 1)(x - 2) < 0;$$

$$x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2).$$

$$\text{Ответ: } (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$$

№4. Решить неравенство:

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$$

Решение:

$$(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2^x + 3 \frac{1}{2^x})^{\log_2 \frac{x^2}{x+6}} > 1 \\ x > 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \left(\log_2 \frac{x^2}{x+6} \right) (2^x + \frac{3}{2^x} - 1) > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - (x+6))(2^{2x} - 2^x + 3) > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x^2 - x - 6 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-3)(x+2) > 0 \\ x > 0 \end{array} \right. ; x > 3$$

$$\text{Ответ: } x > 3$$

№5. Решить неравенство: $(1 - \frac{2x}{5})^{7+11x-6x^2} \geq 1$

Решение: $1 - \frac{2x}{5} > 0$ при $x < 2,5$. На множестве $x < 2,5$

исходное неравенство равносильно $-\frac{2x}{5}(7 + 11x - 6x^2) \geq 0$

$$x(2x+1)(3x-7) \geq 0$$

Получим $-0,5 \leq x \leq 0; \quad \frac{7}{3} \leq x \leq 2,5.$

Ответ: $-0,5 \leq x \leq 0; \quad \frac{7}{3} \leq x \leq 2,5$

№6. Решить неравенство $(4^{x+1} + 2^{x+1} - 1)^{x^2-x} \geq 1$

Решение: Область определения неравенства: $4^{x+1} + 2^{x+1} - 1 > 0$

$$\begin{cases} t = 2^{x+1} > 0, \\ t^2 + t - 1 > 0, \end{cases} \quad t > \frac{\sqrt{5}-1}{2}, x > -2 + \log_2(\sqrt{5}-1)$$

Применим метод рационализации неравенства:

$$(4^{x+1} + 2^{x+1} - 2)(x^2 - x) \geq 0$$

$$(2^{x+1} - 1)(2^{x+1} + 2)x(x - 1) \geq 0, \quad (2^{x+1} - 1)x(x - 1) \geq 0$$

$$(x+1)x(x-1) \geq 0$$

$$-1 \leq x \leq 0; x \geq 1$$

Ответ:

$$-1 \leq x \leq 0; x \geq 1$$

№7. Решить неравенство

$$\frac{(8 - x^3)(2^x - 1)(\sqrt{x + 20} - \sqrt{2x + 30})(|x - 2| - 4 - x^2)\log_5^3 x^2}{(|x|^{2x-1} - |x^{5-x}|)(\log_{x+20}(12 - |x|) - \log_{x+20}(20 - 2|x|))} < 0$$

Решение:

Первый множитель в числителе заменяем на $(2 - x)$, второй на x , третий на $(x + 20 - (2x + 30))$, четвертый на

$((x - 2) - 4 - x^2)((x - 2) + (4 + x^2))$, пятый на $(x^2 - 1)(5 - 1)$.

Первый множитель в знаменателе заменяем на $(3x - 6)(x - 1)(x + 1)$, а второй на $(x - 8)(x + 8)(x + 19)$.

Получаем в области допустимых значений рациональное неравенство, равносильное исходному:

$$\frac{(2 - x)x(-x - 10)(-x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)(x - 1)(x + 1)}{(3x - 6)(x - 1)(x + 1)(x - 8)(x + 8)(x + 19)} < 0$$

Область существования всех множителей в исходном неравенстве представляет собой два промежутка: $-10 < x < 0$ и $0 < x < 10$. В этой области множители $(-x - 10)$ и $(x + 19)$ знакопостоянны, и поэтому их заменяем соответственно на (-1) и 1 .

Знакопостоянны и трехчлены $(-x^2 + x - 6)$ и $(x^2 + x + 2)$, поэтому их заменяем также, соответственно на (-1) и 1 .

$$\frac{(-1)(x - 2)(x - 1)(x + 1)}{3(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x - 8)(x + 8)} < 0$$

Решая последнее стандартное рациональное неравенство в указанной области существования всех множителей исходного неравенства, получаем ответ:

$$-8 < x < -1, -1 < x < 0, 8 < x < 10.$$

Здесь я привожу лишь таблицу с приемами рационализации, облегчающими работу со сложными неравенствами.

$\log_h f \vee \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$\log_h f \vee 1$	$(h-1)(f-h) \vee 0$
$\log_h f \vee 0$	$(h-1)(f-1) \vee 0$
$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
$\log_h f + \log_h g \vee 0$	$(h-1)(fg-1) \vee 0$
$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \vee 1$	$(h-1) \cdot f \vee 0$
$f^h \vee g^h$	$(f-g) \cdot h \vee 0$
$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$
$ f \vee g $	$(f-g)(f+g) \vee 0$

Заключение.

При написании работы были проанализированы сборники по подготовке к ЕГЭ по математике. Многие задания части C_3 содержат неравенства, содержащие неизвестное в основании логарифма, решение которых требует громоздких выкладок и больших затрат времени. Метод рационализации позволяет сократить время при решении такого типа неравенств. Этот способ распространяется и на решение других неравенств (показательных, иррациональных и неравенств, содержащих модули). Были сделаны следующие выводы:

- 1) Основная идея метода рационализации состоит в замене любого множителя A на знакововпадающий с ним и имеющий одни и те же корни (в области определения) множитель B .
- 2) Преобразованные таким образом неравенства всегда равносильно исходному в области определения последнего.
- 3) Указанная замена возможна только тогда, когда заменяемый множитель находится в числителе или знаменателе дроби, которая сравнивается с нулем.
- 4) По внешнему виду неравенства легко определяется возможность применения метода рационализации.

Эта работа может быть использована при подготовке к ЕГЭ. Здесь собрано достаточное количество формул и решенных неравенств, которые помогут любому выпускнику изучить этот метод.

Список литературы.

- 1) В помощь абитуриентам/Составители В. И. Голубев, А. А. Егоров, В. А. Тихомирова.- М.: Бюро Квантум,2009(приложение к журналу КВАНТ)
- 2)Егэ-2013. Математика: типовые экзаменационные варианты:30 вариантов / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Яценко. –М.: Издательство «Национальное образование»,2012.-192с.-(ЕГЭ-2013. ФИПИ – школе.)
- 3) Задачи вступительных экзаменов/ Составители А. А. Егоров, В. А. Тихомирова.- М.: Бюро Квантум,2008(приложение к журналу КВАНТ)
- 4) «Квант» 2006/№4, В.Голубев, «Метод замены множителей»
- 5)Математика. ЕГЭ: сборник заданий: методическое пособие для подготовки к экзамену / Ю. А. Глазков, Т. А. Корешкова, В. В. Мирошин, Н. В. Шевелева. – 3-е изд., испр.- М.: Издательство «Экзамен»,2010.-287с. (Серия « ЕГЭ. Сборник заданий. »
- 6) Подготовка к ЕГЭ по математике в 2012 году. Методические указания/Яценко И. В., Шестаков. С. А., Трепалин А. Сю, Захаров П.И.-М.: МЦНМО,2012.
- 7)Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ:2010: Математика/ авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И.В. Яценко. – М,:АСТ: Астрель,2010.- 93с.- (Федеральный институт педагогических измерений.)
- 8)«Сборник задач по математике для поступающих в Вузы». Уч. Пособие / под ред. М. И. Сканави.- М.: Высшая шк.,1988.
- 9)«Эффективные пути Решения неравенств». Уч. Пособие / под ред. В. И. Голубева , В. А. Тарасова.1992.
- 10) www.alexlarin.narod.ru – Корянов А. Г., Прокофьев А. П. Метод решения неравенств с одной переменной.