

# Реферат

По математике на тему:

## «Война с ОДЗ»

Выполнила:

Кудашева Василиса

Ученица 11 «А» класса

Руководитель:

Милашова Н.Ю.

# Содержание

1. Проблема	2стр.
2. Цель	2стр.
3. Задачи	2стр.
4. Этапы работы	3стр.
5. История формирования	4стр.
6. Способы решения уравнений и неравенств с ОДЗ	7стр.
7. Необязательность ОДЗ	8стр.
8. Опасность ОДЗ	8стр.
9. ОДЗ – решение	9стр.
10.ЕГЭ и ОДЗ	11стр.
11.Заключение	14 стр.
12.Литература	15стр.

# Проблема

Уравнения и неравенства, в которых необходимо нахождение ОДЗ, не нашли место в курсе алгебры систематического изложения, возможно поэтому я и мои сверстники зачастую совершаем ошибки при решении таких примеров, уделив немало времени их решению, но забыв при этом про ОДЗ.

# Цель

Научиться анализировать ситуацию и делать логически корректные выводы в примерах с учетом ОДЗ

# Задачи

- Изучить теоретический материал
- Порешать уравнения, неравенства:
  - a) Дробно-рациональные;
  - b) Иррациональные;
  - c) Логарифмические;
  - d) Содержащие обратные тригонометрические функции.
- Применить изученные материалы в нестандартной ситуации.
- Создать работу «Война с ОДЗ».

## Этапы работы

Работу над проектом я начала с повторения известных мне функций. Область определения многих из них имеет ограничения.

ОДЗ встречается:

1. При решении дробно-рациональных уравнений и неравенств
2. При решении иррациональных уравнений и неравенств
3. При решении логарифмических уравнений и неравенств
4. При решении уравнений и неравенств, содержащие обратные

тригонометрические функции

Прорешав примеры из различных источников (тестов ЕГЭ, задачников и справочников), я систематизировала решение примеров по следующим принципам:

- можно решить пример, учитывая ОДЗ (самый распространённый способ)
- можно решить пример, не учитывая ОДЗ
- можно учитывая лишь ОДЗ прийти к правильному решению
- иногда при решении примера ОДЗ приводит к посторонним корням

Изучив анализ результатов ЕГЭ за 2019 год, я пришла к выводу, что много ошибок было допущено в примерах, в которых нужно учитывать ОДЗ. Это ещё раз подчёркивает актуальность моей темы.

# История формирования

Что ж, давайте узнаем историю формирования ОДЗ.

Как и остальные понятия математики, понятие функции сложилось не сразу, а прошло долгий путь развития. В работе Пьера Ферма «Введение и изучение плоских и телесных мест» (опубликованной в 1679 году) сказано: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место». Вы, конечно, могли догадаться, что речь здесь ведется о функциональной зависимости и её графическом изображении («место» у Ферма означает линию). Изучение линий по их уравнениям в «Геометрии» Р. Декарта (1637) также указывает на ясное представление о зависимости между двумя переменными величинами. Это говорит уже о совершенно отчётливом владении понятием функции. В геометрическом и механическом виде это понятие мы видим у И. Ньютона. Однако сам термин «функция» впервые появляется лишь в 1692 году у Г. Лейбница и притом не совсем в современном его понимании. Г. Лейбниц называет функцией различные отрезки, связанные с какой-либо кривой (например, абсциссы её точек). В первом печатном курсе «Анализа бесконечно малых для познания кривых линий» Лопиталья (1696 года) термин «функция» не употребляется. Первое определение функции, близкое к современному, встречается у И. Бернулли (в 1718 году): «Функция — это величина, составленная из переменной и постоянной». В основе этого не вполне отчётливого определения лежит идея задания функции аналитической формулой.

Изучив некоторые исторические материалы, я пришла к определению ОДЗ для функции. Областью определения (допустимых значений) функции  $Y$  называется совокупность значений независимой переменной  $X$ , при которых эта функция определена, т. е. область изменения независимой переменной (аргумента).

Мы с вами можем наблюдать, что уравнения и системы уравнений математики умели решать очень давно. В «Арифметике» греческого математика из Александрии Диофанта (III века) еще не было

систематического изложения алгебры, однако в ней содержался ряд задач, решаемых с помощью составления уравнений. Есть в ней такая задача:

«Найти два числа по их сумме 20 и произведению 96».

Чтобы обезопасить себя от решения квадратного уравнения общего вида, к которому приводит обозначение одного из чисел буквой, и которое тогда еще не умели решать, Диофант обозначал неизвестные числа  $10 + x$  и  $10 - x$  (в современной записи) и получал неполное квадратное уравнение  $100 - x^2 = 96$ , для которого подходил только положительный корень 2.

Задачи на квадратные уравнения встречаются в трудах индийских математиков уже с V века нашей эры.

Квадратные уравнения классифицируются в трактате «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» Мухаммеда аль-Хорезми (787 — 850 года). В нем рассмотрены и решены (в геометрической форме) 6 видов квадратных уравнений, содержащих в обеих частях только члены с положительными коэффициентами. При этом рассматривались лишь положительные корни уравнений.

В самом известном российском учебнике «Арифметика» Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739 года) имелось немало задач на квадратные уравнения. Вот одна из них:

«Некий генерал хочет с 5000 человек баталию учинить, и чтобы та была в лице вдвое, нежели в стороне. Коликая баталия будет иметь в лице и в стороне?», т. е. сколько солдат надо поставить по фронту и сколько им в затылок, чтобы число солдат по фронту было в 2 раза больше числа солдат, расположенных им «в затылок»?

В древневавилонских текстах (3000 — 2000 лет до нашей эры) встречаются и задачи, решаемые теперь с помощью систем уравнений, содержащих уравнения второй степени. Вот одна из них:

«Площади двух своих квадратов я сложил: 25. Сторона второго квадрата равна стороны первого и еще 5».

Данную задачу вавилонский автор решает правильно, методом, который мы теперь называем методом подстановки, но он еще не пользовался алгебраической символикой.

И только в XVII веке решение квадратных уравнений приняло современный вид.

Как мне кажется, теперь вас интересует вопрос: «Для чего я написала историю возникновения функции и неравенств?» Все дело в том, что ОДЗ – это лишь следствие возникновения различных условий в функциях, задачах, неравенствах и уравнениях.

# Способы решения уравнений и неравенств с ОДЗ

При решении дробно-рациональных уравнений и неравенств учитывается неравенство знаменателя нулю.

**1. Иррациональные**

**Иррациональные  
неравенства**

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$
$$a) \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$
$$б) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$$
$$в) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{cases}$$

## 3. Логарифмические уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

## 4. Логарифмические неравенства

$$\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x)$$

$$1) \begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < g(x) \leq f(x) \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

## 5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

$$\begin{aligned} \arcsin(f(x)) = \arcsin(g(x)) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases} & \arctg(f(x)) = \arctg(g(x)) \\ \arccos(f(x)) = \arccos(g(x)) &\Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| \leq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} & \arccotg(f(x)) = \arccotg(g(x)) \end{aligned}$$



## Необязательность ОДЗ

На уроках математики от нас требуют нахождения ОДЗ в каждом примере. В то же время ОДЗ вовсе необязательно, часто вовсе не нужно, а иногда и невозможно. Но это не значит, что не нахождение ОДЗ понесет за собой какие либо проблемы с решением уравнений или неравенств.

Рассмотрим такое неравенство:

$$\sqrt{2-x} > \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Это неравенство можно решить и без нахождения ОДЗ. Точнее, при решении этого неравенства вполне можно обойтись и без условия  $2-x \geq 0$ .

В самом деле, неравенство, полученное после возведения обеих частей в квадрат :  $2-x > x-1 + 2 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$  «Сильнее», чем  $2-x \geq 0$  и в приведенном решении необходимо только неравенство  $x-1 \geq 0$ .

## Опасность ОДЗ

Известно также, что в результате некоторых преобразований, изменяющих исходное ОДЗ, мы можем прийти к неверным решениям. Вот примеры решений уравнений:

1)  $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ . Перенесем  $\frac{1}{x}$

из правой части в левую, приведем подобные члены уравнения и получим, что  $x=0$ . Однако 0 не входит в ОДЗ.

2)  $\sqrt{x^2-1}=0$ . Преобразуем левую часть, используя формулу разности квадратов, и придем к уравнению  $\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1} = 0$ . Отсюда  $x=1$  или  $x=-1$ . При  $x=-1$ ,  $\sqrt{x-1}$  не существует. Однако ответ:  $x=1$  неполный, а потому неверен.

3)  $(x+1)\sqrt{x}=0$ . Возведем обе части уравнения в квадрат - в данном случае вроде бы безобидное действие, основанное на очевидном соображении: число равно нулю тогда и только тогда, когда его квадрат равен нулю. Получим  $(x+1)^2 \cdot x = 0$ . Однако полученное уравнение имеет корень -1, которого нет у исходного уравнения.

## ОДЗ – решение

И наконец, в множестве примеров, ответ можно получить без решения вовсе, просто найдя ОДЗ.

1. ОДЗ представляет собой пустое множество, а значит, исходный пример не имеет решений.

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{x-3} = \sqrt{2-x}. & 3) \sqrt{\lg_2 x} = \lg_x(1-x). \\ 2) \lg \frac{1}{x} = \lg(-x). \end{array}$$

2. В ОДЗ находится одно или несколько чисел, и несложная подстановка быстро определяет корни.

$$\sqrt{x^2-5x+6} \leq \sqrt{3-x} + \sqrt{x-2}. \quad \text{В ОДЗ находятся два числа: 2 и 3, и оба подходят.}$$

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x}} > \sqrt{x^2-x}. \quad \text{В ОДЗ находятся два числа 0 и 1, и подходит только 1.}$$

$$\sqrt{a-|x|} + \sqrt{x-a} = -a. \quad \text{Из ОДЗ следует, что } a \geq |x| \text{ откуда имеем } a \geq 0$$

Из рассмотрения правой части уравнения видим, что  $a \leq 0$ . Поэтому необходимо равенство  $a=0$ , после чего решение ясно.

3)  $2\arccotg(x+1) + 1 = 0$ . Решение. Число -0,5 не входит в промежуток  $(0; \pi)$  область допустимых значений арккотангенса, поэтому данное уравнение не имеет решения.

Теперь я приведу пример, который мы разбирали на уроке математики, нам решить его было не под силу, но после нахождения ОДЗ все встало на свои места.

Найдите целочисленный корень уравнения

$$\frac{\log_2(7+6x-x^2) - \log_2(x-2)}{10x-24-x^2} = 2$$

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 7 + 6x - x^2 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 10x - 24 - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 7)(x + 1) < 0 \\ x > 2 \\ (6 - x)(4 - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 7) \\ x > 2 \\ x_{1,2} \neq 4; 6 \end{cases}$$

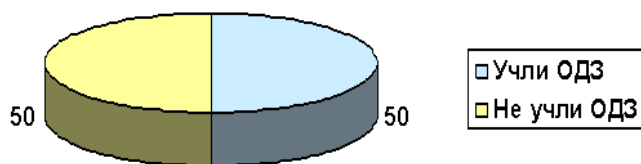
$$x \in (2; 4) \cup (4; 6) \cup (6; 7);$$

Правильное решение возможно лишь про  $x=5$  и  $x=3$ . С помощью ОДЗ находим, что корень  $x=3$  не возможен, следовательно, ответом будет  $x=5$ .

## ЕГЭ и ОДЗ

Ежегодно выпускники, сдающие ЕГЭ, допускают ошибки из-за того, что не нашли ОДЗ. Вот несколько примеров.

- 1) Низкий результат выпускники показывают при решении логарифмических неравенств и иррациональных уравнений. Так с решением простейшего логарифмического неравенства  $\log_3(x + 6) < 2$  справилась лишь половина выпускников. Скорее всего, сдающие не учитывали здесь область определения логарифмической функции, поэтому и допустили ошибки.



2) Продемонстрировали свое умение применять стандартные методы для решения иррациональных уравнений лишь 52% выпускников (например, в уравнении  $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$ ). И опять же, одной из причин таких низких показателей является то, что многие выпускники забывают провести отбор корней, полученных из уравнения после возведения его в квадрат.



Предлагаю рассмотреть решение нескольких уравнений с учетом ОДЗ.

Решение уравнения  $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 28$  встречающееся в типовых вариантах ЕГЭ

**Решение.**

1. Для начала запишем ОДЗ уравнения:

$$6 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6.$$

Именно на этом этапе учащиеся совершают ошибку, попросту позабыв о нахождении области допустимых значений. Так как данное задание требует

развернутого решения, то вполне возможно наличие нескольких корней уравнения.

$$x^2 - 3x + \sqrt{6-x} - \sqrt{6-x} - 28 = 0$$

2. Упростим уравнение, получим

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

Решаем квадратное уравнение, получаем корни:

$$D = b^2 - 4ac = 9 + 4 \cdot 28 = 121$$

$$\sqrt{D} = 11$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + 11}{2} = 7$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - 11}{2} = -4$$

Только один корень  $x = -4$  удовлетворяет ОДЗ.

**Ответ:** -4.

Если поиск ОДЗ выполнен не был, то в ответе будет получено два корня, следовательно, решение не будет засчитано, и задание будет оценено в 0 баллов. Сделаем вывод, что при решении заданий, содержащих дроби и квадратные корни, следует найти ОДЗ, иначе даже правильное решение может привести к неправильным ответам.

Рассмотрим еще один пример задания ЕГЭ

Определить ОДЗ выражения вида  $(1/\sqrt{x+1}-1) + \log|x+8|(x^2+3)$

**Решение**

По условию имеем дробь, поэтому ее знаменатель не должен равняться нулю. Получаем, что  $\sqrt{x+1}-1 \neq 0$ . Подкоренное выражение всегда имеет смысл, когда больше или равно нулю, то есть  $x+1 \geq 0$ . Так как уравнение, данное нам имеет логарифм, то его выражение должно быть строго положительным, то есть  $x^2+3 > 0$ . Основание логарифма также должно иметь

положительное значение, отличное от 1, тогда добавляем еще условия  $x+8>0$  и  $x+8\neq 1$ . Отсюда следует, что искомое ОДЗ примет вид:

$$\sqrt{x+1}-1\neq 0,$$

$$x+1\geq 0,$$

$$x^2+3>0,$$

$$x+8>0,$$

$$x+8\neq 1$$

$$x+1-1\neq 0,$$

$$x+1\geq 0,$$

$$x^2+3>0,$$

$$x+8>0,$$

$$x+8\neq 1$$

Иначе говоря, это называют системой неравенств с одной переменной. Решение приведет к такой записи ОДЗ  $[-1, 0)\cup(0, +\infty)$ .

**Ответ:**  $[-1, 0)\cup(0, +\infty)$

## Заключение

Подводя итог, я уверенно могу сказать, что универсального метода решения уравнения и неравенств нет. Каждый раз, когда пытаешься решить уравнения, неравенства или задачи, при этом не действовав механически, возникает дилемма: «А какой способ решения выбрать?» В нашем случае

«Нужно ли мне искать ОДЗ или не нет?» Я надеюсь, что полученные мною знания и навыки помогут решить эту проблему и я перестану допускать ошибки, при решении задач, где нужно учитывать ОДЗ. Также я надеюсь, что проделанная мной работа сможет помочь и другим ребятам, сдающим экзамен. Оправдаются ли мои надежды, покажет время, а если быть точнее, ЕГЭ.

## **Литература**

<https://youclever.org/>

<https://zachnik.com/spravochnik/matematika/vyrazhenija/oblast-dopustimyh-znachenij-odz/>

<https://school-science.ru/5/7/34277>

<http://www.cleverstudents.ru/expressions/odz.html>

<https://zen.yandex.ru/media/id/5ccc1addbf32e000b08bb653/odz-ili-ogranicheniia-kak-pravilno-oformliat-15-ege-po-matematike-5ccea5e6e6420f00b3fb7432>

<http://www.egesdam.ru/page222.html>

<https://ya-znau.ru/znaniya/zn/178>

<https://ege-ok.ru/2012/01/13/oblast-dopustimyh-znacheniy>