

## §2<sup>1</sup>. Свойства неопределенного интеграла

**Теорема 2.1.** Интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

**Теорема 2.2.** Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx.$$

Зачем нужны эти теоремы? Дело в том, что таблица интегралов дает нам возможность вычислить, например, интегралы

$$\int x^2 dx \text{ и } \int \sin x dx$$

(первый – по формуле 3, второй – по формуле 7 теоремы 1.2). Но что делать, если перед нами

$$\int (x^2 + 2 \sin x)dx ?$$

Таблицы интегралов из теоремы 1.2 здесь явно недостаточно. Зато после применения теорем 2.1 – 2.2 всё сводится к той самой таблице интегралов.

**Пример 2.1.** Найти интеграл

$$\int (5x^4 + 2x^3)dx.$$

◀Имеем

$$\begin{aligned} \int (5x^4 + 2x^3)dx &= |\text{по теореме 2.1}| = \int 5x^4 dx + \int 2x^3 dx = \\ &= |\text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2.}| = \\ &= 5 \int x^4 dx + 2 \int x^3 dx = |\text{применим теорему 1.2 (формулу 3)}| = \\ &= 5 \cdot \frac{x^5}{5} + 2 \cdot \frac{x^4}{4} + c = |\text{видим, что можно сократить}| = x^5 + \frac{x^4}{2} + c. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $x^5 + \frac{x^4}{2} + c$ . ▶

---

<sup>1</sup> §1 см. по ссылке [https://pedrazvitie.ru/servisy/publikaciya\\_materiala\\_na\\_saite/material?id=4478](https://pedrazvitie.ru/servisy/publikaciya_materiala_na_saite/material?id=4478).

Заметим, что, хоть исходный интеграл в процессе нашего решения «разбился» на два, дважды писать «+с» не нужно, ибо сумма/разность произвольных постоянных всё равно дает произвольную постоянную. Поэтому эту произвольную постоянную на этапе  $5 \cdot \frac{x^5}{5} + 2 \cdot \frac{x^4}{4} + c$  и далее достаточно писать лишь один раз.

**Пример 2.2.** Найти интеграл

$$\int (x - 3)^2 dx.$$

◀ Видим, что сложения/вычитания нет. Что делать? Сначала воспользоваться формулой сокращенного умножения (в данном случае – формулой квадрата разности).

$$\begin{aligned} \int (x - 3)^2 dx &= |\text{по формуле квадрата разности}| = \int (x^2 - 6x + 9) dx = \\ &= |\text{по теореме 2.1}| = \int x^2 dx - \int 6x dx + \int 9 dx = \\ &= |\text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2.}| = \\ &= \int x^2 dx - 6 \int x dx + 9 \int dx = \\ &= |\text{применим теорему 1.2 (формулы 3 и 2)}| = \\ &= |\text{вспомним, что во втором интеграле } x \text{ можно понимать как } x^1| = \\ &= \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + 9 \cdot x + c = |\text{видим, что можно сократить}| = \\ &= \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + c. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{x^3}{3} - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + c$ . ▶

**Пример 2.3.** Найти интеграл

$$\int (x^5 - 5^x) dx.$$

◀ Имеем

$$\begin{aligned} \int (x^5 - 5^x) dx &= |\text{по теореме 2.1}| = \int x^5 dx - \int 5^x dx = \\ &= |\text{видим, что никаких чисел, чтоб выносить за знак интеграла, нет}| = \\ &= |\text{вэтом случае сразу применяем теорему 1.2 (формулы 3 и 5)}| = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^6}{6} - \frac{5^x}{\ln 5} + c.$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $\frac{x^6}{6} - \frac{5^x}{\ln 5} + c.$  ►

**Пример 2.4.** Найти интеграл

$$\int \left( \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx.$$

◄Имеем

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sin^2 x} \right) dx &= | \text{по теореме 2.1} | = \int \frac{2}{\cos^2 x} dx - \int \frac{3}{\sin^2 x} dx = \\ &= | \text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2} | = \\ &= 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = | \text{приведем интегралы к табличным} | = \\ &= 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 3 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = | \text{по формулам 10 и 9 теоремы 1.2} | = 2 \operatorname{tg} x - \\ &- 3 \cdot (-\operatorname{ctg} x) + c = | \text{умножим минус на минус} | = 2 \operatorname{tg} x + 3 \cdot \operatorname{ctg} x + c. \end{aligned}$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $2 \operatorname{tg} x + 3 \cdot \operatorname{ctg} x + c.$  ►

**Пример 2.5.** Найти интеграл

$$\int (2e^x - 3 \cos x) dx.$$

◄Имеем

$$\begin{aligned} \int (2e^x - 3 \cos x) dx &= | \text{по теореме 2.1} | = \int 2e^x dx - \int 3 \cos x dx = \\ &= | \text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2} | = \\ &= 2 \int e^x dx - 3 \int \cos x dx = | \text{применим теорему 1.2 (формулы 6 и 8)} | = \\ &= 2e^x - 3 \sin x + c. \end{aligned}$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $2e^x - 3 \sin x + c.$  ►

**Пример 2.6.** Найти интеграл

$$\int \left( 8 - \frac{1}{\sqrt{64 - x^2}} \right) dx.$$

◀Имеем

$$\begin{aligned} \int \left( 8 - \frac{1}{\sqrt{64 - x^2}} \right) dx &= |\text{по теореме 2.1}| = \int 8 dx - \int \frac{1}{\sqrt{64 - x^2}} dx = \\ &= |\text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2}| = \\ &= 8 \int dx - \int \frac{1}{\sqrt{64 - x^2}} dx = |\text{приведем интегралы к табличным}| = \\ &= 8 \int dx - \int \frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}} = \\ &= |\text{применим теорему 1.2 (формулы 2 и 11 (раз } a^2 = 64, \text{ то } a = 8))}| = \\ &= 8x - \arcsin \frac{x}{8} + c. \end{aligned}$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $8x - \arcsin \frac{x}{8} + c$ . ▶

**Пример 2.7.** Найти интеграл

$$\int \left( 3 \cos x - 2 \sin x + 5e^x - \frac{7}{x} \right) dx.$$

◀Имеем

$$\begin{aligned} \int \left( 3 \cos x - 2 \sin x + 5e^x - \frac{7}{x} \right) dx &= |\text{по теореме 2.1}| = \\ &= \int 3 \cos x dx - \int 2 \sin x dx + \int 5e^x dx - \int \frac{7}{x} dx = \\ &= |\text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2}| = \\ &= 3 \int \cos x dx - 2 \int \sin x dx + 5 \int e^x dx - 7 \int \frac{1}{x} dx = \\ &= |\text{приведем интегралы к табличным}| = \\ &= 3 \int \cos x dx - 2 \int \sin x dx + 5 \int e^x dx - 7 \int \frac{dx}{x} = \\ &= |\text{применим теорему 1.2 (формулы соответственно 8, 7, 6 и 4)}| = \\ &= 3 \sin x - 2 \cdot (-\cos x) + 5e^x - 7 \ln|x| + c = |\text{умножим минус на минус}| = \\ &= 3 \sin x + 2 \cos x + 5e^x - 7 \ln|x| + c. \end{aligned}$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $3 \sin x + 2 \cos x + 5e^x - 7 \ln|x| + c$ . ►

**Пример 2.8.** Найти интеграл

$$\int \left( 3x^2 + \frac{5}{x^2 + 625} - \frac{8}{4 - x^2} \right) dx.$$

◀Имеем

$$\begin{aligned} \int \left( 3x^2 + \frac{5}{x^2 + 625} - \frac{8}{4 - x^2} \right) dx &= |\text{по теореме 2.1}| = \\ &= \int 3x^2 dx + \int \frac{5}{x^2 + 625} dx - \int \frac{8}{4 - x^2} dx = \\ &= |\text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2}| = \\ &= 3 \int x^2 dx + 5 \int \frac{1}{x^2 + 625} dx - 8 \int \frac{1}{4 - x^2} dx = \\ &= |\text{приведем интегралы к табличным}| = \\ &= 3 \int x^2 dx + 5 \int \frac{dx}{x^2 + 625} - 8 \int \frac{dx}{4 - x^2} = \\ &= |\text{применим теорему 1.2 (формулы соответственно 3, 12 и 13)}| = \\ &= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{1}{25} \operatorname{arctg} \frac{x}{25} - 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c = \\ &= |\text{сокращаем что можем}| = x^3 + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{25} - 2 \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c. \end{aligned}$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $x^3 + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{25} - 2 \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c$ . ►

**Пример 2.9.** Найти интеграл

$$\int (4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}) dx.$$

◀Имеем

$$\begin{aligned} \int (4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}) dx &= |\text{по теореме 2.1}| = \int 4\sqrt[3]{x} dx - \int 6\sqrt{x} dx = \\ &= |\text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2}| = \\ &= 4 \int \sqrt[3]{x} dx - 6 \int \sqrt{x} dx = |\text{приведем интегралы к табличным}| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int x^{\frac{1}{3}} dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx = |\text{применим теорему 1.2 (формулу 3)}| = \\
&= 4 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - 6 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = |\text{считаем}| = 4 \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 6 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\
&= |\text{избавляемся от двухэтажных дробей}| = \\
&= \left| \text{деление на } \frac{4}{3} \text{ есть умножение на } \frac{3}{4}; \text{ аналогично с делением на } \frac{3}{2} \right| = \\
&= 4 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - 6 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = |\text{сокращаем}| = 3x^{\frac{4}{3}} - 2 \cdot 2x^{\frac{3}{2}} + c = \\
&= 3x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{3}{2}} + c = |\text{по определению корня}| = 3\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt{x^3} + c.
\end{aligned}$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $3\sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt{x^3} + c$ . ►

**Пример 2.10.** Найти интеграл

$$\int \left( \frac{3}{x} + 2 \right) \sqrt{x} dx.$$

◀Пока не видим сложения/вычитания, а видим умножение скобки на корень. Но в данном случае сложение легко получить, раскрыв скобки.

$$\begin{aligned}
&\int \left( \frac{3}{x} + 2 \right) \sqrt{x} dx = |\text{по определению корня}| = \int \left( \frac{3}{x} + 2 \right) x^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= |\text{раскроем скобки}| = \int \left( \frac{3}{x} \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \\
&= \left| \text{в первом слагаемом производим сокращение на } x^{\frac{1}{2}} : \text{ ведь } x \text{ есть } x^1 \right| = \\
&= \int \left( \frac{3}{x^{1-\frac{1}{2}}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int \left( \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \int \left( 3 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \\
&= |\text{по свойствам степеней}| = \int \left( 3x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) dx = |\text{по теореме 2.1}| = \\
&= \int 3x^{-\frac{1}{2}} dx + \int 2x^{\frac{1}{2}} dx = \\
&= |\text{видим, что перед } x \text{ есть числа, значит, применяем теорему 2.2}| = \\
&= 3 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx = |\text{применим теорему 1.2 (формулу 3)}| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = |\text{считаем}| = 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\
&= |\text{избавляемся от двухэтажных дробей}| = \\
&= \left| \text{деление на } \frac{1}{2} \text{ есть умножение на } \frac{2}{1}; \text{ аналогично с делением на } \frac{3}{2} \right| = \\
&= 3 \cdot \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = |\text{считаем}| = \frac{6}{1} x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \\
&= 6x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = |\text{по определению корня}| = 6\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + c.
\end{aligned}$$

Далее преобразовать не можем, поэтому оставляем в таком виде.

**Ответ:**  $6\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + c$ . ►