

§5¹. Интегрирование простейших рациональных дробей

Рассмотрим некоторые способы интегрирования простейших рациональных дробей типа

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx.$$

Здесь возможны три случая в зависимости от того, сколько вещественных корней имеет многочлен знаменателя $x^2 + px + q$.

Случай 1. Пусть многочлен $x^2 + px + q$ имеет два корня x_1, x_2 . Тогда дробь

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

можно разбить на две дроби

$$\frac{A}{x - x_1} \text{ и } \frac{B}{x - x_2}.$$

А эти дроби интегрируются довольно просто: методом замены переменной (см. §3) интегралы от этих дробей равны соответственно $A \ln |x - x_1|$ и $B \ln |x - x_2|$. Осталось понять, как определить коэффициенты A и B . Это так называемые «неопределенные коэффициенты», и метод их отыскания называется методом неопределенных коэффициентов. Проиллюстрируем этот метод на примерах.

Пример 5.1. Найти интеграл

$$\int \frac{2x - 7}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

◀1) Находим корни многочлена $x^2 - 5x + 6$. Для этого приравняем его к нулю и решаем полученное уравнение. Имеем

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

¹§1 см. по ссылке https://pedrazvitie.ru/servisy/publikaciya_materiala_na_saite/material?id=4478, §2 – по ссылке https://pedrazvitie.ru/servisy/publikaciya_materiala_na_saite/material?id=4508, §3 – по ссылке https://pedrazvitie.ru/servisy/publikaciya_materiala_na_saite/material?id=4555, §4 – по ссылке https://pedrazvitie.ru/servisy/publikaciya_materiala_na_saite/material?id=4613.

$$x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Значит, $x^2 - 5x + 6 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x - 3)$, и имеем интеграл

$$\int \frac{2x - 7}{(x - 2)(x - 3)} dx.$$

2) Представляем исходную дробь

$$\frac{2x - 7}{(x - 2)(x - 3)}$$

следующим образом:

$$\frac{2x - 7}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}.$$

Правую часть приводим к общему знаменателю. У первой дроби дополнительный множитель $x - 3$, у второй — $x - 2$. Общий знаменатель этих двух дробей будет $(x - 2)(x - 3)$. Имеем

$$\frac{2x - 7}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}.$$

Т.к. слева и справа знаменатели одинаковы, отбросим их. Справа раскроем скобки числителя:

$$2x - 7 = Ax - 3A + Bx - 2B.$$

Приведем подобные: из первого и третьего слагаемого правой части вынесем x . Имеем:

$$2x - 7 = (A + B)x - 3A - 2B.$$

3) Приравняем соответствующие коэффициенты (при x и свободные члены) слева и справа:

- Т.к. справа коэффициент при x равен $A + B$, а слева он равен 2, то, приравняв их, имеем уравнение $A + B = 2$.
- Т.к. справа свободный член имеет вид $-3A - 2B$, а слева он равен -7 , то, приравняв их, имеем уравнение $-3A - 2B = -7$.

Тем самым имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ -3A - 2B = -7. \end{cases}$$

Решим эту систему любым удобным способом. Например, умножим обе части первого уравнения на 2:

$$\begin{cases} 2A + 2B = 4, \\ -3A - 2B = -7. \end{cases}$$

Сложим два уравнения:

$$2A + 2B + (-3A - 2B) = 4 + (-7).$$

Раскроем скобки:

$$2A + 2B - 3A - 2B = -3.$$

Приводя слева подобные, получим

$$-A = -3,$$

откуда

$$A = 3.$$

Чтобы найти B , воспользуемся наиболее удобным уравнением системы, например, уравнением $A + B = 2$. Подставим вместо A полученное выше число 3:

$$3 + B = 2.$$

Отсюда

$$B = -1.$$

4) Вспомним, что у нас было равенство

$$\frac{2x - 7}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}.$$

На предыдущем шаге мы нашли, что $A = 3$ и $B = -1$. Подставляем эти значения в разложение дроби:

$$\frac{2x - 7}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{3}{x - 2} + \frac{-1}{x - 3} = \frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x - 3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 7}{(x - 2)(x - 3)} dx &= \int \left(\frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x - 3} \right) dx = \\ &= |\text{по сказанному в теории к настоящему параграфу}| = \\ &= 3 \ln |x - 2| - \ln |x - 3| + c. \end{aligned}$$

Ответ: $3 \ln |x - 2| - \ln |x - 3| + c$. ►

Пример 5.2. Найти интеграл

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 - x - 2} dx.$$

◀1) Находим корни многочлена $x^2 - x - 2$. Для этого приравняем его к нулю и решаем полученное уравнение. Имеем

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Значит, $x^2 - x - 2 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - (-1))(x - 2) = (x + 1)(x - 2)$, и имеем интеграл

$$\int \frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 2)} dx.$$

2) Представляем исходную дробь

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 2)}$$

следующим образом:

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

Правую часть приводим к общему знаменателю. У первой дроби дополнительный множитель $x - 2$, у второй – $x + 1$. Общий знаменатель этих двух дробей будет $(x + 1)(x - 2)$. Имеем

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}.$$

Т.к. слева и справа знаменатели одинаковы, отбросим их. Справа раскроем скобки числителя:

$$3x + 5 = Ax - 2A + Bx + B.$$

Приведем подобные: из первого и третьего слагаемого правой части вынесем x . Имеем:

$$3x + 5 = (A + B)x - 2A + B.$$

3) Приравняем соответствующие коэффициенты (при x и свободные члены) слева и справа:

- Т.к. справа коэффициент при x равен $A + B$, а слева он равен 3, то, приравняв их, имеем уравнение $A + B = 3$.

- Т.к. справа свободный член имеет вид $-2A + B$, а слева он равен 5, то, приравнявая их, имеем уравнение $-2A + B = 5$.

Тем самым имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ -2A + B = 5. \end{cases}$$

Решим эту систему любым удобным способом. Например, вычтем из первого уравнения второе:

$$A + B - (-2A + B) = 3 - 5.$$

Раскроем скобки:

$$A + B + 2A - B = -2.$$

Приведем подобные, получим

$$3A = -2,$$

откуда

$$A = -\frac{2}{3}.$$

Чтобы найти B , воспользуемся наиболее удобным уравнением системы, например, уравнением $A + B = 3$. Подставим вместо A полученное выше число $-\frac{2}{3}$:

$$-\frac{2}{3} + B = 3.$$

Отсюда

$$B = 3 - \left(-\frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}.$$

4) Вспомним, что у нас было равенство

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}.$$

На предыдущем шаге мы нашли, что $A = -\frac{2}{3}$ и $B = \frac{11}{3}$. Подставляем эти значения в разложение дроби:

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{-\frac{2}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{11}{3}}{x - 2}.$$

Тогда

$$\int \frac{3x + 5}{(x + 1)(x - 2)} dx = \int \left(\frac{-\frac{2}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{11}{3}}{x - 2} \right) dx =$$

$$= |\text{по сказанному в теории к настоящему параграфу}| =$$

$$= -\frac{2}{3} \ln|x + 1| + \frac{11}{3} \ln|x - 2| + c.$$

Ответ: $-\frac{2}{3} \ln|x + 1| + \frac{11}{3} \ln|x - 2| + c.$ ►

Пример 5.3. Найти интеграл

$$\int \frac{5x + 11}{x^2 - 2x - 3} dx.$$

◀ 1) Находим корни многочлена $x^2 - 2x - 3$. Для этого приравняем его к нулю и решаем полученное уравнение. Имеем

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Значит,

$$x^2 - 2x - 3 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - (-1))(x - 3) = (x + 1)(x - 3),$$

и имеем интеграл

$$\int \frac{5x + 11}{(x + 1)(x - 3)} dx.$$

2) Представляем исходную дробь

$$\frac{5x + 11}{(x + 1)(x - 3)}$$

следующим образом:

$$\frac{5x + 11}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}.$$

Правую часть приводим к общему знаменателю. У первой дроби дополнительный множитель $x - 3$, у второй — $x + 1$. Общий знаменатель этих двух дробей будет $(x + 1)(x - 3)$. Имеем

$$\frac{5x + 11}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A(x - 3) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)}.$$

Т.к. слева и справа знаменатели одинаковы, отбросим их. Справа раскроем скобки числителя:

$$5x + 11 = Ax - 3A + Bx + B.$$

Приведем подобные: из первого и третьего слагаемого правой части вынесем x . Имеем:

$$5x + 11 = (A + B)x - 3A + B.$$

3) Приравняем соответствующие коэффициенты (при x и свободные члены) слева и справа:

- Т.к. справа коэффициент при x равен $A + B$, а слева он равен 5, то, приравняв их, имеем уравнение $A + B = 5$.
- Т.к. справа свободный член имеет вид $-3A + B$, а слева он равен 11, то, приравняв их, имеем уравнение $-3A + B = 11$.

Тем самым имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} A + B = 5, \\ -3A + B = 11. \end{cases}$$

Решим эту систему любым удобным способом. Например, вычтем из первого уравнения второе:

$$A + B - (-3A + B) = 5 - 11.$$

Слева раскроем скобки, справа – вычтем из 5 11.

$$A + B + 3A - B = -6.$$

Приведем подобные, получим

$$4A = -6,$$

откуда

$$A = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Возьмем уравнение $A + B = 5$. Подставим туда $-\frac{3}{2}$ вместо A :

$$-\frac{3}{2} + B = 5,$$

откуда

$$B = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

4) Вспомним, что у нас было равенство

$$\frac{5x + 11}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3}.$$

На предыдущем шаге мы нашли, что $A = -\frac{3}{2}$ и $B = \frac{13}{2}$. Подставляем эти значения в разложение дроби:

$$\frac{5x + 11}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{-\frac{3}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{13}{2}}{x - 3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 11}{(x + 1)(x - 3)} dx &= \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{13}{2}}{x - 3} \right) dx = \\ &= |\text{по сказанному в теории к настоящему параграфу}| = \\ &= -\frac{3}{2} \ln|x + 1| + \frac{13}{2} \ln|x - 3| + c. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{3}{2} \ln|x + 1| + \frac{13}{2} \ln|x - 3| + c.$ ►

Случай 2. Пусть многочлен $x^2 + px + q$ имеет один корень x_1 . Тогда дробь

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

примет вид

$$\frac{ax + b}{(x - x_1)^2}.$$

Ее тогда можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{ax + b}{(x - x_1)^2} &= |\text{вынесем число } a \text{ за скобку}| = \frac{a \left(x + \frac{b}{a} \right)}{(x - x_1)^2} = a \cdot \frac{x + \frac{b}{a}}{(x - x_1)^2} = \\ &= |\text{вычтем и добавим в числителе } x_1| = a \cdot \frac{x - x_1 + x_1 + \frac{b}{a}}{(x - x_1)^2} = \\ &= |\text{разобьем дробь на две}| = a \cdot \left(\frac{x - x_1}{(x - x_1)^2} + \frac{x_1 + \frac{b}{a}}{(x - x_1)^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= |\text{сократим}| = a \cdot \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{x_1 + \frac{b}{a}}{(x - x_1)^2} \right).$$

Интеграл от этих дробей берется методом замены переменной (см. §3). Первый даст $\ln |x - x_1|$, второй – выражение

$$-\frac{x_1 + \frac{b}{a}}{x - x_1}.$$

Проиллюстрируем вышеописанную теорию примерами.

Пример 5.4. Найти интеграл

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

◀ 1) Находим корни многочлена $x^2 - 2x + 1$. Для этого приравняем его к нулю и решаем полученное уравнение. Имеем

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Дискриминант данного квадратного уравнения равен нулю, поэтому уравнение имеет один корень

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Значит, $x^2 - 2x + 1 = (x - x_1)^2 = (x - 1)^2$.

2) Имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 1} dx &= \int \frac{3x - 1}{(x - 1)^2} dx = |\text{вынесем 3}| = \int \frac{3 \left(x - \frac{1}{3} \right)}{(x - 1)^2} dx = \\ &= |\text{по теореме 2.2}| = 3 \cdot \int \frac{x - \frac{1}{3}}{(x - 1)^2} dx = |\text{вычтем и прибавим 1}| = \\ &= 3 \cdot \int \frac{x - 1 + 1 - \frac{1}{3}}{(x - 1)^2} dx = |\text{разобьем на две дроби}| = \\ &= 3 \cdot \int \left(\frac{x - 1}{(x - 1)^2} + \frac{1 - \frac{1}{3}}{(x - 1)^2} \right) dx = |\text{в первом интеграле сокращаем}| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |\text{во втором считаем}| = 3 \cdot \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)^2} \right) dx = \\
&= |\text{по теореме 2.1}| = 3 \cdot \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \cdot \int \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)^2} dx = \\
&= |\text{по теореме 2.2}| = 3 \cdot \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \\
&= |\text{сокращаем на 3}| = 3 \cdot \int \frac{dx}{x-1} + 2 \cdot \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \\
&= |\text{методом замены переменной (см. §3) находим эти интегралы}| = \\
&= 3 \cdot \ln|x-1| + 2 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c = 3 \cdot \ln|x-1| + 2 \cdot \frac{1}{-(x-1)^1} + c = \\
&= 3 \ln|x-1| - 2 \cdot \frac{1}{(x-1)^1} + c = 3 \ln|x-1| - 2 \cdot \frac{1}{x-1} + c = \\
&= 3 \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + c.
\end{aligned}$$

Ответ: $3 \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + c$. ►

Пример 5.5. Найти интеграл

$$\int \frac{2x+11}{x^2+6x+9} dx.$$

◀ 1) Находим корни многочлена $x^2 - 2x + 1$. Для этого приравняем его к нулю и решаем полученное уравнение. Имеем

$$x^2 + 6x + 9 = 0.$$

Дискриминант данного квадратного уравнения равен нулю, поэтому уравнение имеет один корень

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3.$$

$$\text{Значит, } x^2 + 6x + 9 = (x - x_1)^2 = (x - (-3))^2 = (x + 6)^2.$$

2) Имеем:

$$\int \frac{2x+11}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{2x+11}{(x+6)^2} dx = |\text{вынесем 2}| = \int \frac{2\left(x + \frac{11}{2}\right)}{(x+6)^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= |\text{по теореме 2.2}| = 2 \cdot \int \frac{x + \frac{11}{2}}{(x+6)^2} dx = |\text{прибавим и вычтем 6}| = \\
&= 2 \cdot \int \frac{x + 6 - 6 + \frac{11}{2}}{(x+6)^2} dx = |\text{разобьем на две дроби}| = \\
&= 2 \cdot \int \left(\frac{x+6}{(x+6)^2} + \frac{-6 + \frac{11}{2}}{(x+6)^2} \right) dx = |\text{в первом интеграле сокращаем}| = \\
&= |\text{во втором считаем}| = 2 \cdot \int \left(\frac{1}{x+6} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+6)^2} \right) dx = \\
&= |\text{по теореме 2.1}| = 2 \cdot \int \frac{1}{x+6} dx + 2 \cdot \int \frac{-\frac{1}{2}}{(x+6)^2} dx = \\
&= |\text{по теореме 2.2}| = 2 \cdot \int \frac{1}{x+6} dx + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \int \frac{1}{(x+6)^2} dx = \\
&= \left| \text{умножаем 2 на } -\frac{1}{2} \text{ — получаем } -1 \right| = 2 \cdot \int \frac{dx}{x+6} - 1 \cdot \int \frac{dx}{(x+6)^2} = \\
&= |\text{методом замены переменной (см. §3) находим эти интегралы}| = \\
&= 2 \cdot \ln|x+6| - 1 \cdot \frac{(x+6)^{-1}}{-1} + c = 2 \cdot \ln|x+6| - 1 \cdot \frac{1}{-(x+6)^1} + c = \\
&= |\text{убираем умножение на 1, не несущее смысла}| = \\
&= |\text{убираем также возведение в степень 1}| = 2 \ln|x+6| - \frac{1}{-(x+6)} + c = \\
&= |\text{минус на минус дали плюс}| = 2 \ln|x+6| + \frac{1}{x+6} + c.
\end{aligned}$$

Ответ: $2 \ln|x+6| + \frac{1}{x+6} + c$. ►

Пример 5.6. Найти интеграл

$$\int \frac{5-4x}{x^2-4x+4} dx.$$

◀ 1) Находим корни многочлена $x^2 - 4x + 4$. Для этого приравняем его к нулю и решаем полученное уравнение. Имеем

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Дискриминант данного квадратного уравнения равен нулю, поэтому уравнение имеет один корень

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = -\frac{-4}{2} = 2.$$

$$\text{Значит, } x^2 - 4x + 4 = (x - x_1)^2 = (x - 4)^2.$$

2) Имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{5 - 4x}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int \frac{5 - 4x}{(x - 4)^2} dx = |\text{вынесем } -4| = \int \frac{-4 \left(x - \frac{5}{4}\right)}{(x - 4)^2} dx = \\ &= |\text{по теореме 2.2}| = -4 \cdot \int \frac{x - \frac{5}{4}}{(x - 4)^2} dx = |\text{вычтем и прибавим } 4| = \\ &= -4 \cdot \int \frac{x - 4 + 4 - \frac{5}{4}}{(x - 4)^2} dx = |\text{разобьем на две дроби}| = \\ &= -4 \cdot \int \left(\frac{x - 4}{(x - 4)^2} + \frac{4 - \frac{5}{4}}{(x - 4)^2} \right) dx = |\text{в первом интеграле сокращаем}| = \\ &= |\text{во втором считаем}| = -4 \cdot \int \left(\frac{1}{x - 4} + \frac{\frac{11}{4}}{(x - 4)^2} \right) dx = \\ &= |\text{по теореме 2.1}| = -4 \cdot \int \frac{1}{x - 4} dx + (-4) \cdot \int \frac{\frac{11}{4}}{(x - 4)^2} dx = \\ &= |\text{по теореме 2.2}| = -4 \cdot \int \frac{1}{x - 4} dx + (-4) \cdot \frac{11}{4} \cdot \int \frac{1}{(x - 4)^2} dx = \\ &= \left| \text{умножаем } -4 \text{ на } \frac{11}{4} - \text{получаем } -11 \right| = -4 \cdot \int \frac{dx}{x - 4} - \\ &\quad -11 \cdot \int \frac{dx}{(x - 4)^2} = \\ &= |\text{методом замены переменной (см. §3) находим эти интегралы}| = \\ &= -4 \cdot \ln|x - 4| - 11 \cdot \frac{(x - 4)^{-1}}{-1} + c = -4 \ln|x - 4| - 11 \cdot \frac{1}{-(x - 4)^1} + c = \\ &= |\text{убираем возведение в степень } 1| = -4 \ln|x - 4| - \frac{11}{-(x - 4)} + c = \end{aligned}$$

$$= |\text{минус на минус дали плюс}| = -4 \ln|x - 4| + \frac{11}{x - 4} + c.$$

Ответ: $-4 \ln|x - 4| + \frac{11}{x - 4} + c.$ ►

Случай 3. Пусть многочлен $x^2 + px + q$ не имеет корней (напомним, такая ситуация возникает, когда дискриминант уравнения $x^2 + px + q = 0$ отрицателен).

Пример 5.7. Найти интеграл

$$\int \frac{3x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

◄ 1) Приравнявая знаменатель к нулю, получим уравнение

$$x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Имеем отрицательный дискриминант (что очень легко проверить), поэтому многочлен $x^2 + 2x + 5$ на множители не раскладывается.

2) Заметим, что

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 5)' &= |\text{по правилам дифференцирования}| = \\ &= (x^2)' + (2x)' + 5' = |\text{по таблице производных}| = 2x + 2 \cdot 1 + 0 = \\ &= 2x + 2. \end{aligned}$$

Поэтому в числителе дроби также необходимо добиваться $2x + 2$. Имеем

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= \frac{3}{2} \left(2x + \frac{8}{3} \right) = \frac{3}{2} \left(2x + 2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{2} \cdot (2x + 2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot (2x + 2) + 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 4}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{\frac{3}{2} \cdot (2x + 2) + 1}{x^2 + 2x + 5} dx = \\ &= \int \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot (2x + 2)}{x^2 + 2x + 5} + \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = |\text{по теореме 2.1}| = \\ &= \int \frac{\frac{3}{2} \cdot (2x + 2)}{x^2 + 2x + 5} dx + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = |\text{по теореме 2.2}| = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Первый из этих интегралов берется при помощи замены переменной (см. §3): он равен $\ln(x^2+2x+5) + c$.

Во втором интеграле многочлен x^2+2x+5 представим как полный квадрат.

$$\begin{aligned} x^2+2x+5 &= |\text{второе слагаемое есть удвоенное произведение}| = \\ &= x^2+2 \cdot x \cdot 1+5 = |\text{значит, третье слагаемое должно быть } 1^2| = \\ &= |\text{пишем там } 1^2, \text{ т. е. } 1, \text{ значит от } 5 \text{ тем самым остается } 4| = \\ &= x^2+2 \cdot x \cdot 1+1^2+4 = |\text{собираем полный квадрат}| = (x+1)^2+4. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \\ &= |\text{с помощью замены переменной (см. §3)}| = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{x^2+2x+5} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \\ &= |\text{первый интеграл равен } \ln(x^2+2x+5) + c| = \\ &= \left| \text{второй интеграл равен } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c \right| = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + c$. ►

Пример 5.8. Найти интеграл

$$\int \frac{4x-1}{x^2-6x+10} dx.$$

◀1) Приравнивая знаменатель к нулю, получим уравнение

$$x^2-6x+10=0.$$

Имеем отрицательный дискриминант (что очень легко проверить), поэтому многочлен $x^2-6x+10$ на множители не раскладывается.

2) Заметим, что

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x + 10)' &= |\text{по правилам дифференцирования}| = \\&= (x^2)' - (6x)' + 10' = |\text{по таблице производных}| = 2x - 6 \cdot 1 + 0 = \\&= 2x - 6.\end{aligned}$$

Поэтому в числителе дроби также необходимо добиваться $2x - 6$. Имеем

$$\begin{aligned}4x - 1 &= 2 \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(2x - 6 + \frac{11}{2}\right) = 2 \cdot (2x - 6) + 2 \cdot \frac{11}{2} = \\&= 2 \cdot (2x - 6) + 11.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{4x - 1}{x^2 - 6x + 10} dx &= \int \frac{2 \cdot (2x - 6) + 11}{x^2 - 6x + 10} dx = \\&= \int \left(\frac{2 \cdot (2x - 6)}{x^2 - 6x + 10} + \frac{11}{x^2 - 6x + 10} \right) dx = |\text{по теореме 2.1}| = \\&= \int \frac{2 \cdot (2x - 6)}{x^2 - 6x + 10} dx + \int \frac{11}{x^2 - 6x + 10} dx = |\text{по теореме 2.2}| = \\&= 2 \cdot \int \frac{(2x - 6)dx}{x^2 - 6x + 10} + 11 \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}.\end{aligned}$$

Первый из этих интегралов берется при помощи замены переменной (см. §3): он равен $\ln(x^2 - 6x + 10) + c$.

Во втором интеграле многочлен $x^2 - 6x + 10$ представим как полный квадрат.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 10 &= |\text{второе слагаемое есть удвоенное произведение}| = \\&= x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 10 = |\text{значит, третье слагаемое должно быть } 3^2| = \\&= |\text{пишем там } 3^2, \text{ т. е. } 9, \text{ значит от } 10 \text{ тем самым остается } 1| = \\&= x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 + 1 = |\text{собираем полный квадрат}| = (x - 3)^2 + 1.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} &= \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 1} = \\&= |\text{с помощью замены переменной (см. §3)}| = \frac{1}{1} \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{1} + c = \\&= \operatorname{arctg}(x - 3) + c.\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-1}{x^2-6x+10} dx &= 2 \cdot \int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+10} + 11 \cdot \int \frac{dx}{x^2-6x+10} = \\ &= |\text{первый интеграл равен } \ln(x^2-6x+10) + c| = \\ &= |\text{второй интеграл равен } \operatorname{arctg}(x-3) + c| = \\ &= 2 \ln(x^2-6x+10) + 11 \operatorname{arctg}(x-3) + c.\end{aligned}$$

Ответ: $2 \ln(x^2-6x+10) + 11 \operatorname{arctg}(x-3) + c$. ►

Пример 5.9. Найти интеграл

$$\int \frac{10x-3}{x^2-3x+4} dx.$$

◀ 1) Приравнявая знаменатель к нулю, получим уравнение

$$x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Имеем отрицательный дискриминант (что очень легко проверить), поэтому многочлен $x^2 - 3x + 4$ на множители не раскладывается.

2) Заметим, что

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 4)' &= |\text{по правилам дифференцирования}| = \\ &= (x^2)' - (3x)' + 4' = |\text{по таблице производных}| = 2x - 3 \cdot 1 + 0 = \\ &= 2x - 3.\end{aligned}$$

Поэтому в числителе дроби также необходимо добиваться $2x - 3$. Имеем

$$\begin{aligned}10x - 3 &= 5 \cdot \left(2x - \frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \left(2x - 3 + \frac{12}{5}\right) = 5 \cdot (2x - 3) + 5 \cdot \frac{12}{5} = \\ &= 5 \cdot (2x - 3) + 12.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{10x-3}{x^2-3x+4} dx &= \int \frac{5 \cdot (2x-3) + 12}{x^2-3x+4} dx = \\ &= \int \left(\frac{5 \cdot (2x-3)}{x^2-3x+4} + \frac{12}{x^2-3x+4} \right) dx = |\text{по теореме 2.1}| = \\ &= \int \frac{5 \cdot (2x-3)}{x^2-3x+4} dx + \int \frac{12}{x^2-3x+4} dx = |\text{по теореме 2.2}| = \\ &= 5 \int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+4} + 12 \cdot \int \frac{dx}{x^2-3x+4}.\end{aligned}$$

Первый из этих интегралов берется при помощи замены переменной (см. §3): он равен $\ln(x^2 - 3x + 4) + c$.

Во втором интеграле многочлен $x^2 - 3x + 4$ представим как полный квадрат.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 4 &= |\text{второе слагаемое есть удвоенное произведение}| = \\ &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + 4 = \left| \text{значит, третье слагаемое должно быть } \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right| = \\ &= \left| \text{пишем там } \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ т. е. } \frac{9}{4}, \text{ значит от 4 тем самым остается } \frac{7}{4} \right| = \\ &= x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = |\text{собираем полный квадрат}| = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4} &= \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \\ &= |\text{с помощью замены переменной (см. §3)}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + c = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + c = |\text{избавимся от двухэтажных дробей}| = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2(x - \frac{3}{2})}{\sqrt{7}} + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 2 \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{7}} + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{7}} + c. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \frac{10x - 3}{x^2 - 3x + 4} dx &= 5 \int \frac{(2x - 3)dx}{x^2 - 3x + 4} + 12 \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4} = \\ &= |\text{первый интеграл равен } \ln(x^2 - 3x + 4) + c| = \\ &= \left| \text{второй интеграл равен } \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{7}} + c \right| = \\ &= 5 \ln(x^2 - 3x + 4) + 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{7}} + c = |\text{умножаем}| = \end{aligned}$$

$$= 5 \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{24}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{7}} + c.$$

Ответ: $5 \ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{24}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{7}} + c.$ ►